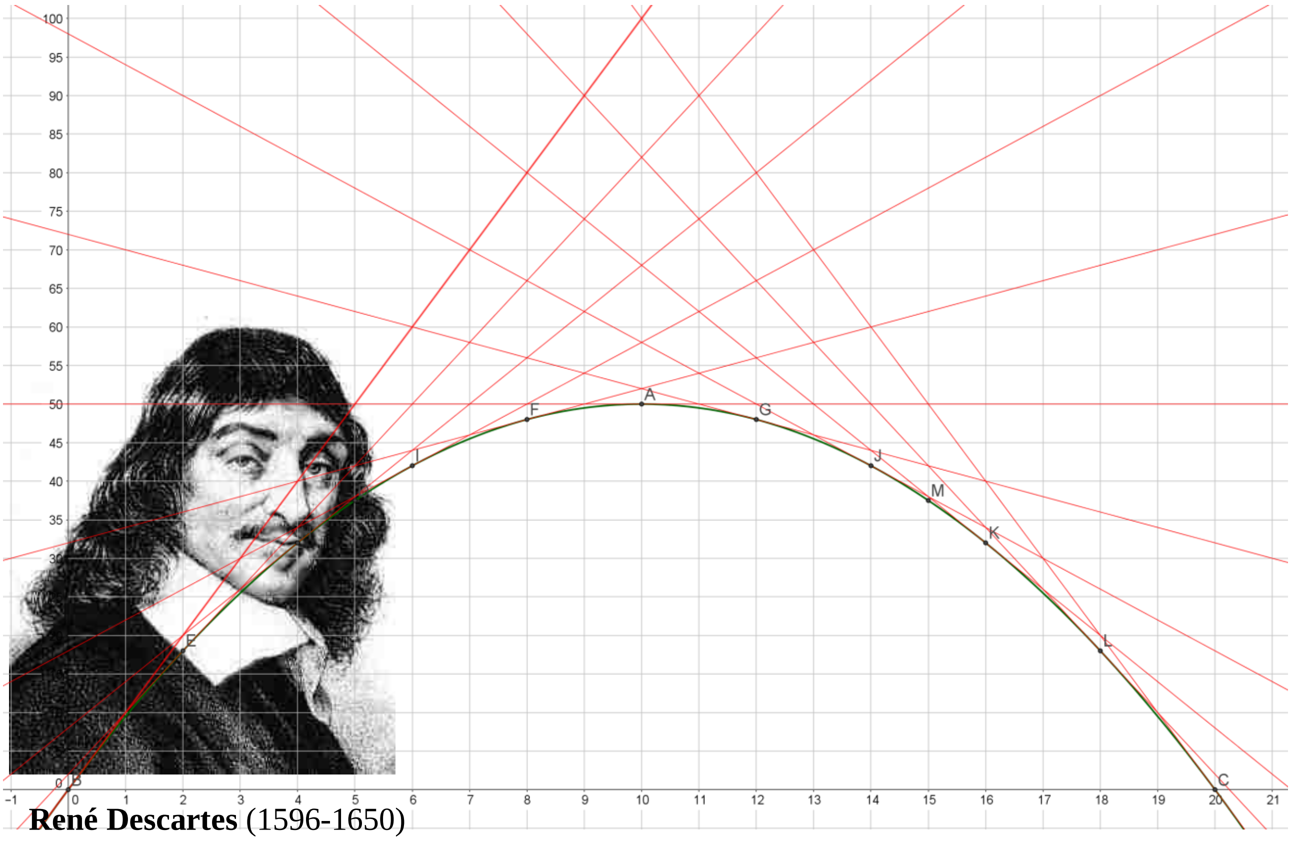
Navn: _______________ Klasse: ____

Matematik Opgave Kompendium

Analytisk Geometri 2

(funktioner)



René Descartes (1596-1650)

Fransk filosof og matematikker der finder på at kombinerer Algebra (ligninger) med Geometri og får hermed Analytisk Geometri (koordinatsystemet)! I dette kan man afbillede ligninger som f.eks. rette linjer, buer eller andet!

Udover dette er han også kendt for filosofi udsagnet:

”*Jeg tænker derfor er jeg*”!

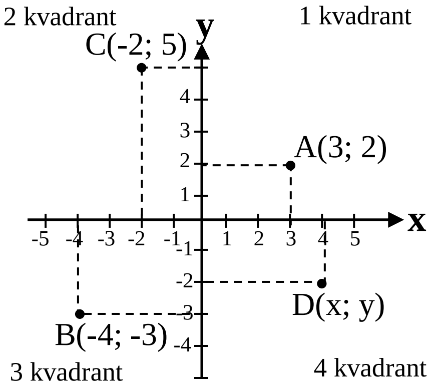
Opgaver: 24

Ekstra: 8

Mdt: 5

Point: _____

Koordinatsystemet:



For at forstå funktioner og grafer er det yderst vigtigt at man først forstår hvordan et koordinatsystem er opbygget!

Et almindeligt 2 dimensionalt koordinatsystem består af 2 akser:

- X-aksen (vandret streg også kaldt *abscissen*)
- Y-asken (lodret streg også kaldt *ordinanten*)

På tegningen til højre kan du se et koordinatsystem og her kan du se at x og y aksen står vinkelret på hinanden! Der hvor de *to akser mødes (skærer) kaldes for Origo (0,0)* og *de 4 områder/felter som akserne danner kaldes for kvadranter*! Hver akse er inddelt i intervaller som oftest vil være 1 men kan være hvad som helst!

I koordinatsystemet kan man afsætte forskellige punkter ofte kaldt A, B osv. Hvert punkt kan man fortælle hvor ligger ved, at angive hvor langt ud af x aksen man skal gå (x koordinat). Og hvor langt man skal op af y asken (y koordinatet). Punktet A ligger derfor 3 ud af x-aksen og 2 op af y-aksen! Prøv at se på punktet D i koordinatsystemet.

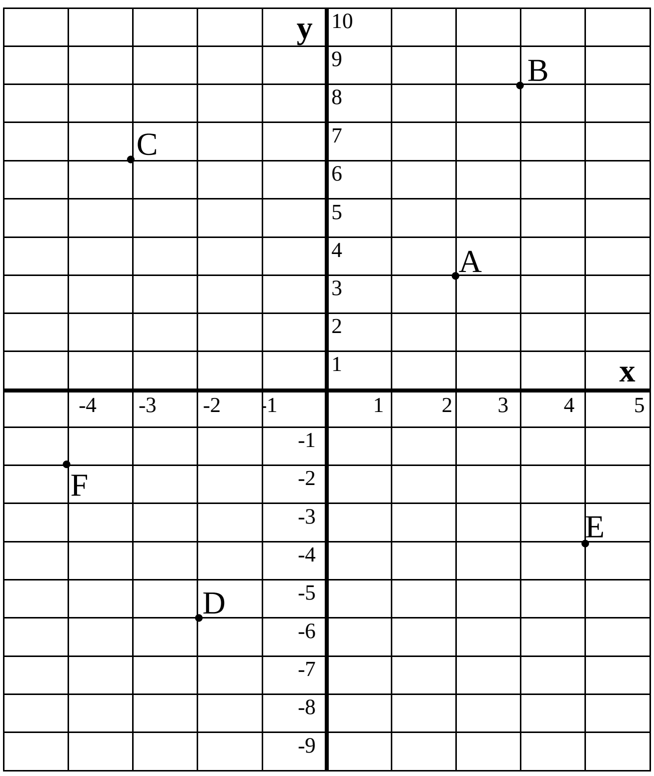
Hvad er koordinatsættet? (___;___) Ja det er rigtigt (4, -2)

Huskeregel til X før Y:
Hen af gaden op til Yvonne

Rene Descartes (1596 – 1650) opfandt koordinatsystemet og til ære for ham kalder man det i dag et *kartesisk koordinatsystem* (NB: hans latinske navn var *Cartesius*). Koordinatsystemet var banebrydende fordi det åbnede op for en helt ny matematik hvor geometri og algebra (ligninger) kan forenes. *Dette kaldes også for analytisk geometri.*

Opgave 1: Aflæs punkterne i koordinatsystemet til højre!

a) A (;)
b) B (;)
c) C (;)
d) D (;)
e) E (;)
f) F (;)

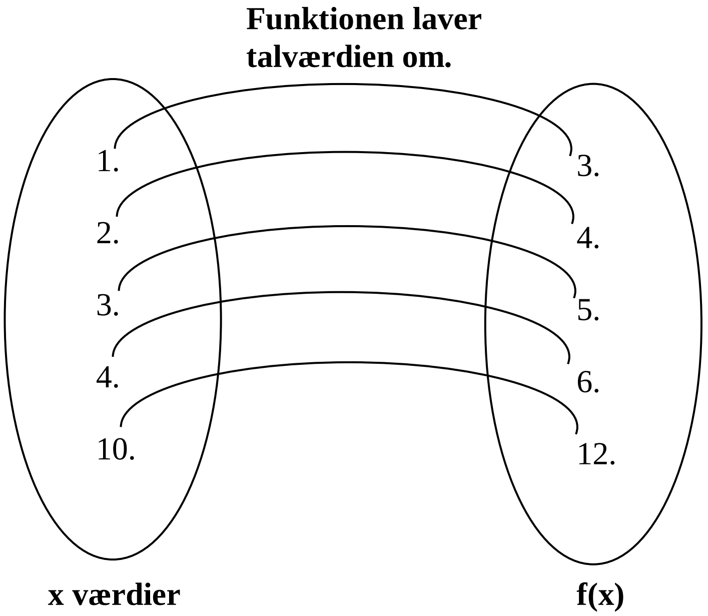


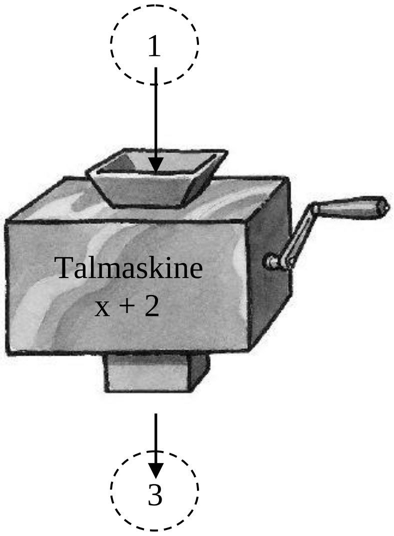
Facit: (-4; - 2) (-3; 6) (-4; 7) (-2; -6)
(2; -1) (2; 3) (3; 8) (4; -4)

Hvad er en funktion:

En funktion er kortfortalt en ligning som omdanner en talværdi til en anden. Dvs. man kan sige, at en funktion er en slags **tal-maskine** der laver tal om til nye. En funktion symboliseres med:

$f(x)$ som udtales f af x..





Funktionen eller talmaskinen ovenfor ændrer tallet vha. en ligning. Prøv at se på hvad der sker med tallene imellem de to bobler. 1 bliver til 3 og 2 bliver til 4. Hvad gør funktionen ved x værdierne?

Det er rigtigt – der bliver lagt 2 til x værdierne. Og dette kan stilles op som en ligning/formel som er selve funktionen: (**NB:** *x står jo for et tal vi ikke kender!*)

$$f(x) = x + 2$$

hvis man erstatter f(x) med y får vi noget som de fleste gerne skulle genkende:

$$y = x + 2.$$

Rigtigt - det er en ligning der beskriver en ret linje i et koordinatsystem hvor hældningen er 1 og skæring med y akslen er i 2. ($y = ax + b$)

Dette leder os frem til en anden vigtig pointe omkring funktionen hvilket er at funktionen sådan set bare er en ligning og intet andet.

$f(x) = x + 2$ er det samme som $y = x + 2$

Hvordan man tegner en funktion (grafisk afbillede):

Alle funktioner danner en graf i et koordinatsystem. De simpleste funktioner danner en ret linje – disse kaldes **for lineære funktioner**. Andre igen danner forskellige kurver som f.eks. parabler og hyperbler. I det følgende skal vi se på hvordan man altid kan tegne en funktion i et koordinatsystem.

I det følgende vil vi tegne funktionen

$f(x) = x + 2$

I et koordinatsystem vha. et sildeben.

x					
y					

x	1	2	3	4	5
y					

x	1	2	3	4	5
y	*1+2*	*2+2*	*3+2*	*4+2*	*5+2*

x	1	2	3	4	5
y	3	4	5	6	7

Sildebenet:

Til højre er vist et tomt sildeben.

Vi starter med at fylde tilfældige x værdier ind for oven.

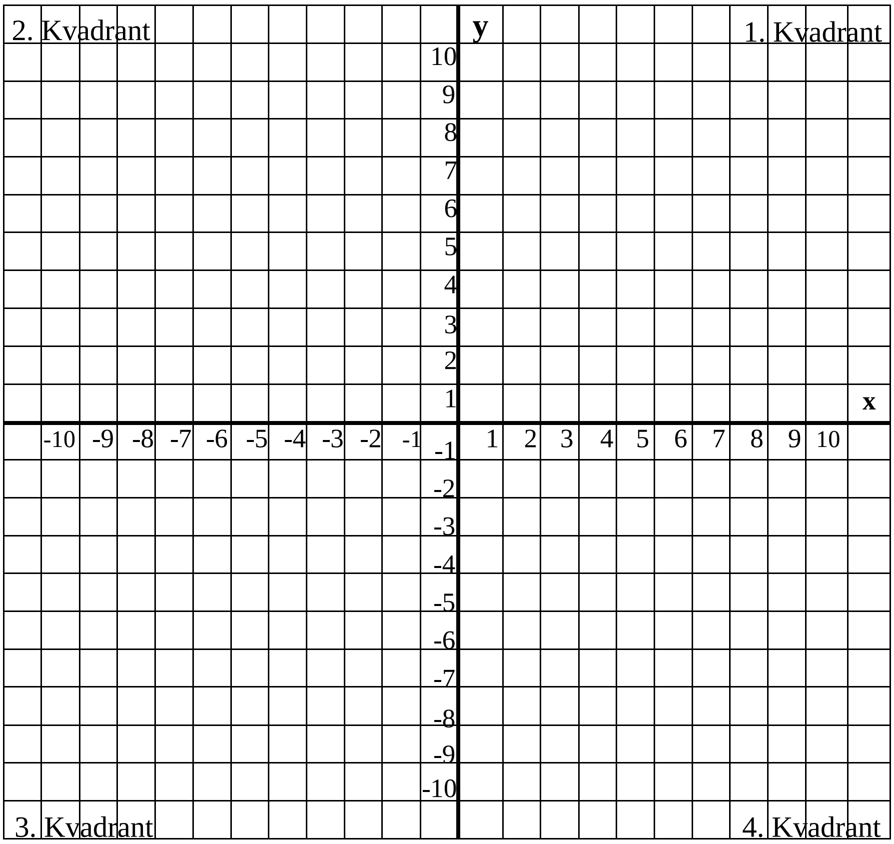
Så sætter man x værdierne ind i funktionen en af gangen**:**

$f(x) = x + 2 \quad$ hvor $x = 1$

$f(1) = 1 + 2 = 3$

Dette giver koordinatsættet (1,3) osv. (2,4), (3,5)

Opgave 2: Plot koordinaterne ind og tegn linjen.



Spørgsmål: *Hvad kaldes det sted hvor x aksen og y aksen skærer hinanden?* ____________

Opgave 3: Udfyld sildeben for hver af ligningerne og indtegn dem på koordinatsystemet nedenfor.

Aflæs skæringspunkterne imellem linjerne.

a) f(x) = x + 3

x	1	2	3	4	5
y					

b) f(x) = 2x + 2

x	1	2	3	4	5
y					

c) f(x) = 3x

x	1	2	3	4	5
y					

d) f(x) = x – 2

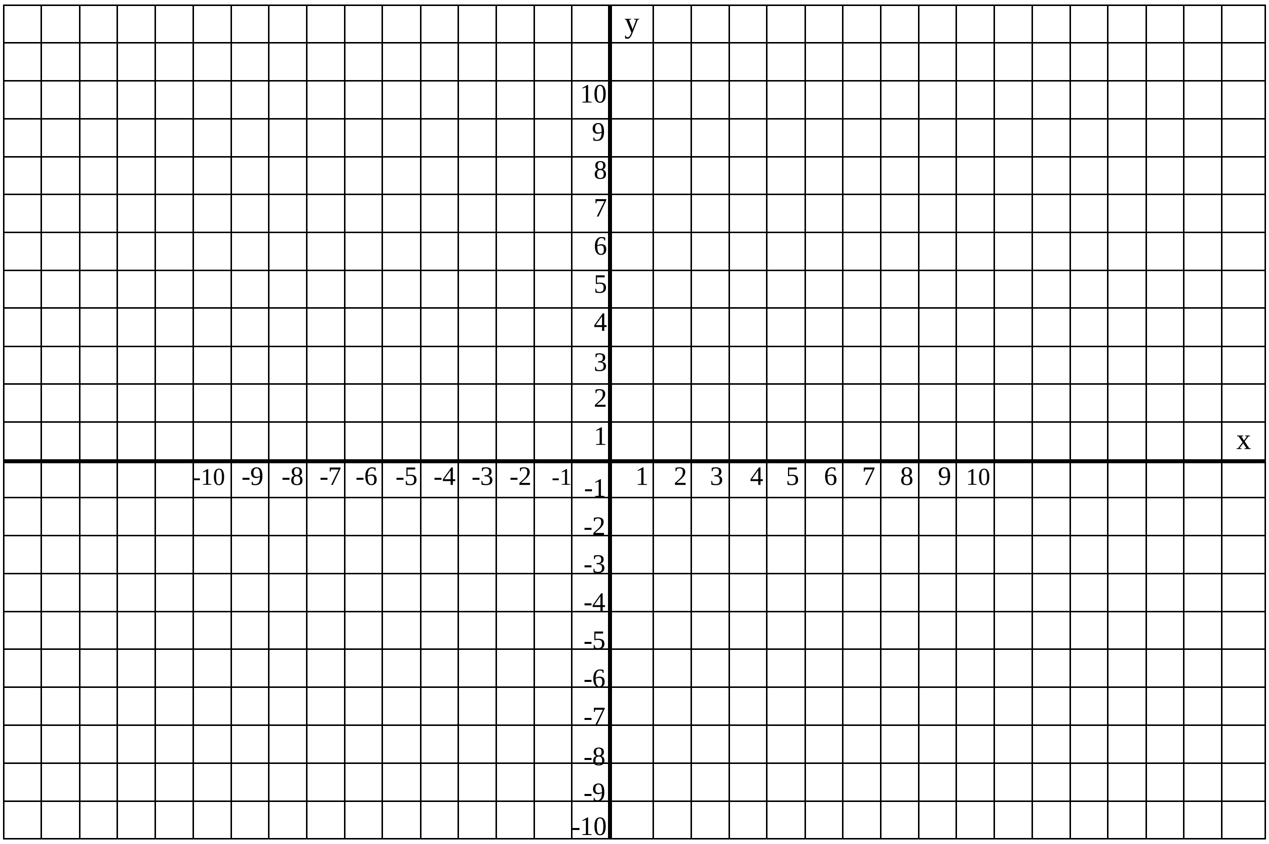
x					
y					

e) f(x) = -2x

x					
y					

f) f(x) = -x + 2

x					
y					



Skæring imellem a og b:

Skæring imellem c og d:

Skæring imellem e og f:

Facit: (-2, 4) (-1, -2) (-1, -3) (1,4) (3, 4)

Linjens ligning & Den lineære funktion:

Du kan måske huske linjens ligning så ud som følgende:

$y = ax + b$

hvor:

a = hældning (1 ud af x akslen og hældning op)

b = linjens skæring med y akslen.

Den tilsvarende kan laves for funktioner:

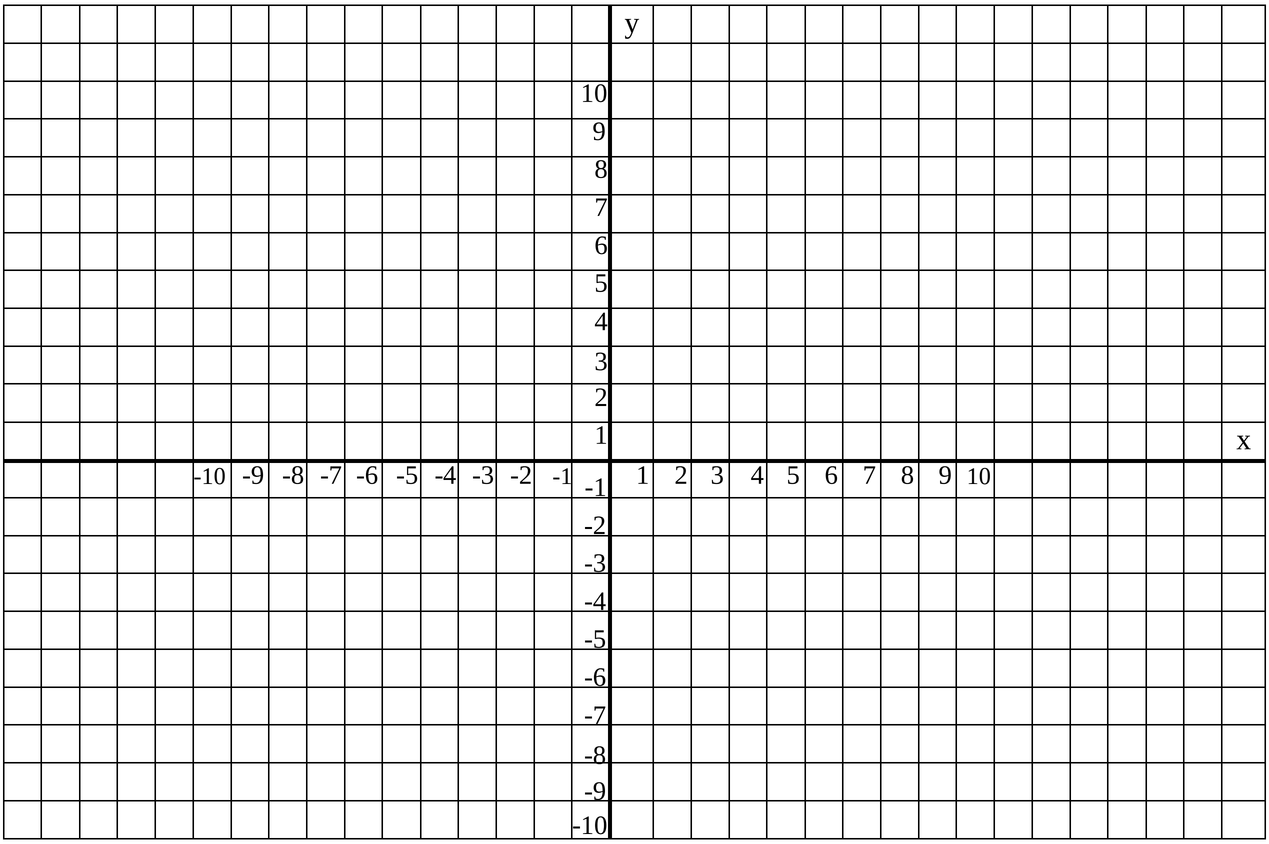
$f(x) = ax + b$

At tegne linjen direkte ind:

- Find b i ligningen
- Find punktet på y akslen og sæt en prik.
- Find a i ligningen.
- Ryk 1 ud af x akslen og hældningen op eller ned. Tegn en prik.
- Forsæt videre fra prikken - en ud og hældning op.

Opgave 4: Tegn funktionerne direkte ind i koordinatsystemet nedenfor ved at bruge hældning og skæring med y akslen. Aflæs skæringspunkterne bagefter.

a) $f(x) = x + 1$
b) $f(x) = 2x – 5$
c) $f(x) = -2x + 3$
d) $f(x) = 3x – 2$
e) $f(x) = -3x – 6$
f) $f(x) = 3x$



Skæring imellem a og b:

Skæring imellem c og d:

Skæring imellem e og f:

Facit: (-2, 4) (-1, -3) (1,1) (6, 7) (6, 9)

Opgave 5: Tegn funktionerne koordinatsystemet og aflæs skæringspunkterne bagefter.

a) $f(x) = 2x + 3$

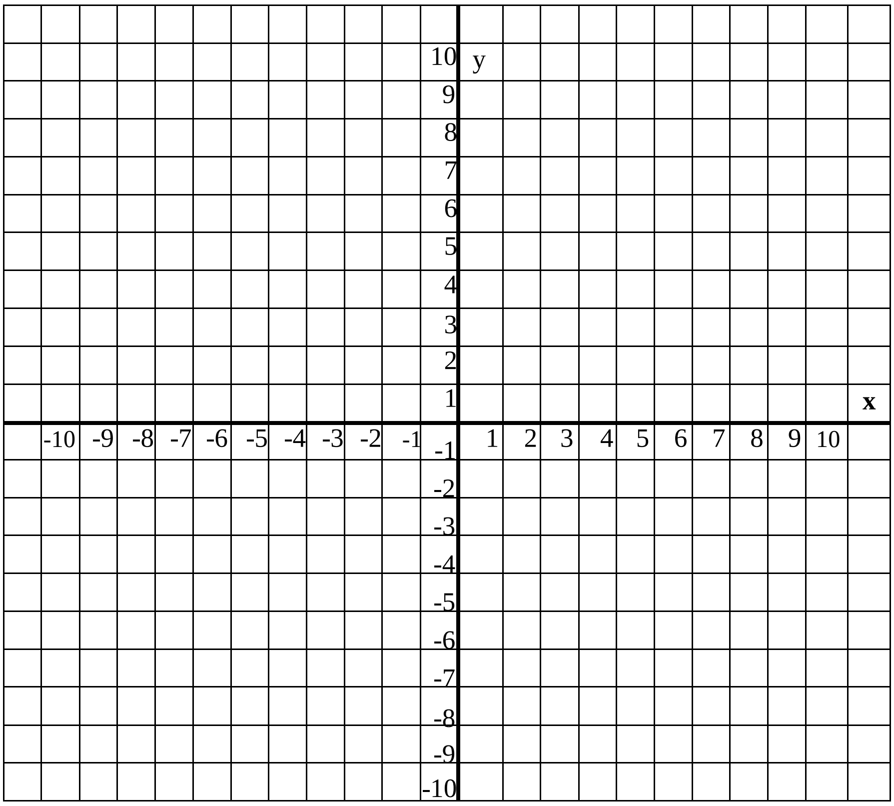
b) $f(x) = -4x + 9$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x$

d) $f(x) = -x + 3$

e) $f(x) = 7$

f) $f(x) = 2x + 1$

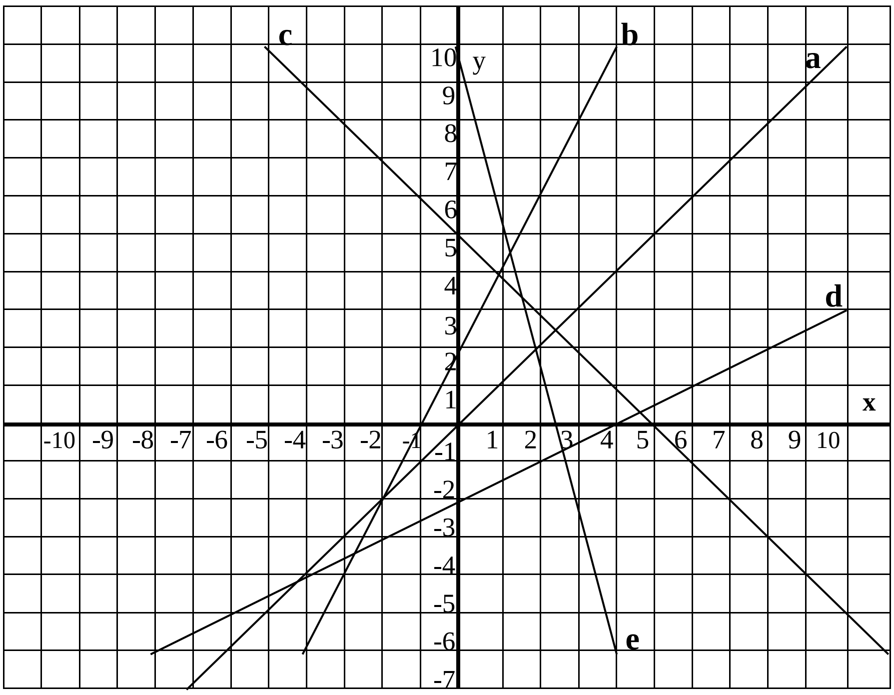


Skæring a og b:

Skæring c og d:

Skæring e og f:

Opgave 6: Find funktionerne til de rette linjer nedenfor.



a) a = ____ b = ____
f(x) =

b) a = ____ b = ____
f(x) =

c) a = ____ b = ____
f(x) =

d) a = ____ b = ____
f(x) =

e) a = ____ b = ____
f(x) =

Facit: (-1, -1) (1,5) (1,9) (2,1) (3, 7) (5,8)
$f(x) = -2x + 3$, $f(x) = -x + 5$, $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $f(x) = x$, $f(x) = 2x + 2$, $f(x) = 3x$, $f(x) = -4x + 10$

Beregning af linjens hældning ud fra to punkter på linjen:

Hvis man har to punkter som man ved ligger på en ret linje kan man beregne linjens hældning. Hvis punkterne hedder $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ kan hældningen beregnes ved følgende formel:

$$a = \text{hældningen} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

Lad os tage et eksempel på hvad det her vil betyde:

I opgave 5 går linje b igennem mange punkter – men to af dem kan nemt aflæses til:

A(1,4) og B(3,8) (se selv efter at det passer).

Dvs at:

$x_1 = 1 \quad y_1 = 4$

$x_2 = 3 \quad y_2 = 8$

Vi sætter ind i formlen:

$$a = \frac{8-4}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

Dvs, linjens hældning er 2.

Opgave 7: Beregn linjernes hældning der går igennem de to punkter.

a) A(3,4), B(4,5)

$x_1 =$ __ $y_1 =$ ___

$x_2 =$ __ $y_2 =$ ____

$a = \frac{\quad}{4-3} =$

b) A(8,2), B(10,6)

$x_1 =$ __ $y_1 =$ ___

$x_2 =$ __ $y_2 =$ ____

a =

c) A(3,1), B(9,16)

$x_1 =$ __ $y_1 =$ ___

$x_2 =$ __ $y_2 =$ ____

a =

d) A(0,0), B(9,3)

$x_1 =$ __ $y_1 =$ ___

$x_2 =$ __ $y_2 =$ ____

a =

e) A(1,2), B(3,3)

$x_1 =$ __ $y_1 =$ ___

$x_2 =$ __ $y_2 =$ ____

a =

f) A(1,10), B(3,2)

$x_1 =$ __ $y_1 =$ ___

$x_2 =$ __ $y_2 =$ ____

a =

Ekstra Opgave 1: I en retvinklet trekant er kateterne 5 & 12. Hvor lang er hypotenusen?

Facit: -8 -4 0,5 0,33 1 1,5 2 2,5 3 5 10 13

Ligefrem Proportionale funktioner:

Vi skal nu se på en speciel form for lineær funktion kaldt proportionalitet som oftest ses i naturen og benyttes i mange sammenhænge i fysik. Ligefrem Proportionalitet kan opstå imellem 2 forhold som påvirker hinanden gensidigt. Påvirkningen fungerer på en sådan måde at når det ene forhold stiger så stiger det andet forhold også tilsvarende – og omvendt hvis det ene forhold falder så falder det andet tilsvarende.

Et eksempel på dette kunne være givet med en bil der køre på en vej. Her er der to forhold som er proportionale nemlig *Tid og Strækning*. Jo længere tid bilen køre jo længere når den. Sagt med matematik sprog siges det der er tale om ligefrem proportionalitet hvis:

en fordobling af x giver en fordobling af f(x) også kendt som y

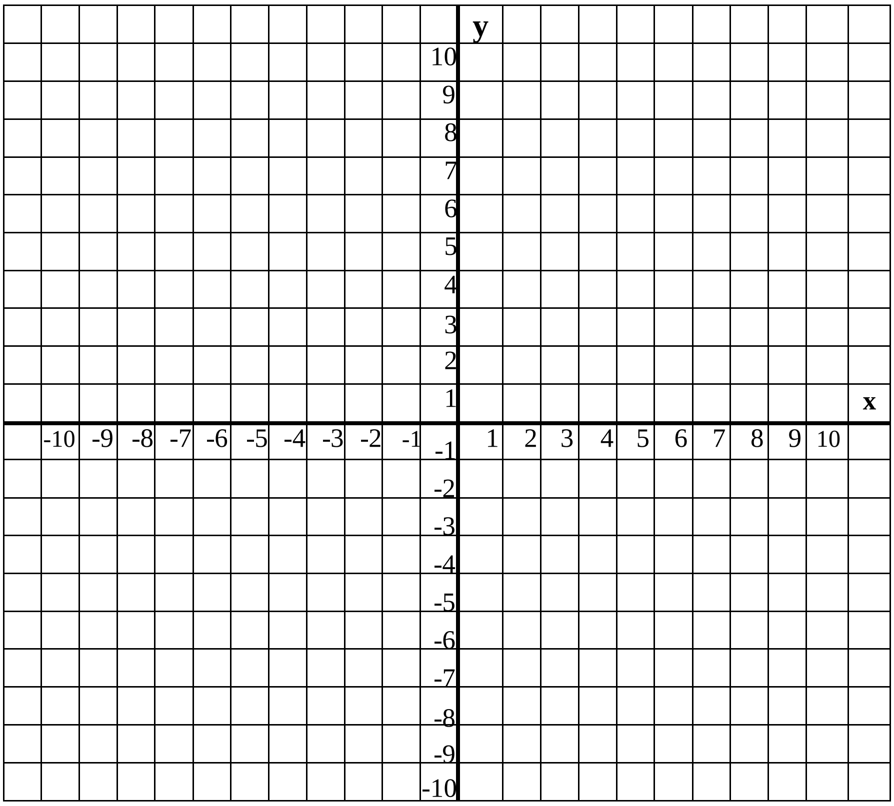
Dette kan altså også udtrykkes med funktionen:

$f(x) = ax$ (a = en konstant dvs. et tal som ikke ændres)

Ligesom de andre funktioner kan denne specielle type også tegnes i et koordinatsystem, og her ser vi straks at en ligefrem proportionalitet må danne en ret linje som går igennem Origo (0,0):

Opgave 8: Tegn de ligefremme proportionale funktioner i koordinatsystemet.

a) $f(x) = 1x$ b) $f(x) = 3x$ c) $f(x) = 4x$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x$



Opgave 9: Den virkelige Verden & Proportionalitet

På forrige side så vi på at strækning og tid var proportionale forhold. Men verden indeholder mange andre størrelser der påvirker hinanden:

- **Benzin & Strækning:** Jo længere bilen køre jo mere benzin bruger den. Eller i hvert fald hvis den køre med den samme fart - fordi benzinforbruget ændres med bilens fart.

  Benzin = a * Strækning (hvor a = konstant)

  Giv et bud på hvad a kan være: _______________
- **Arbejdstid & Løn:** Jo længere man arbejder jo mere tjener man. Eller i hvert fald hvis man ikke skal arbejde gratis i en periode (som man skal hos paradis is).

  Løn = a * Arbejdstid

  Giv et bud på hvad a kan være: _______________
- **Rumfang & Vægt:** Jo større rumfang jo mere vejer tingen (vægt/masse). Eller i hvert fald hvis den er massiv og ikke fyldt med luft. Konstanten a er her bedre kendt som massefylden:

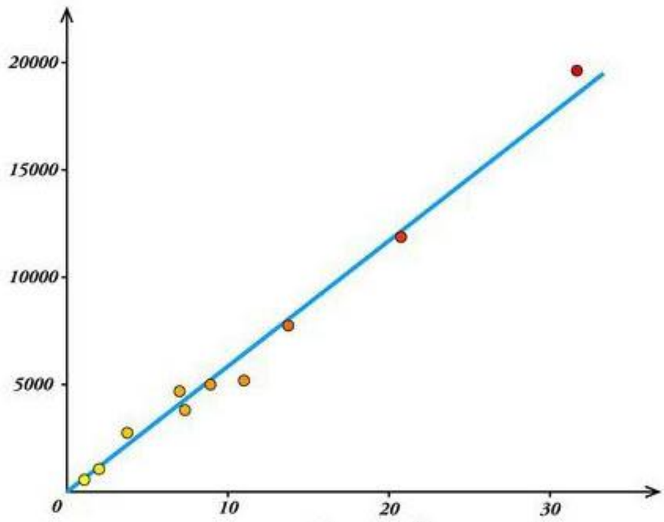
  Vægt = a * Rumfang

  Giv et bud på hvad a kan være: _______________
- **Klogskab & Matematiktimer:** Jo flere matematiktimer man har jo klogere bliver man ;)

Kan du selv komme på flere eksempler: ____

Hvordan finder man ud af om noget er proportionalt:

I de tilfælde ovenfor er vi ikke i tvivl om hvorvidt de må være proportionale – men i den naturvidenskabelige verden er det ikke nok med at fundere over tingenes sammenhæng – der skal eksperimenter til.



Hvis man ønsker at vise at to forholde er proportionale må man foretage nogle målinger af de to forhold i forskellige situationer. Disse målinger bliver til koordinatpunkter. Herefter kan man plotte dem ind i et koordinatsystem hvor det ene forhold sættes ud af x aksen og det andet til y aksen. Hvis punkterne danner en ret linje der går igennem origo har man vist at de må være ligefrem proportionale. Nogle gange falder målingerne udenfor linjen men det er okay så længe flertallet følger den samme tendens.

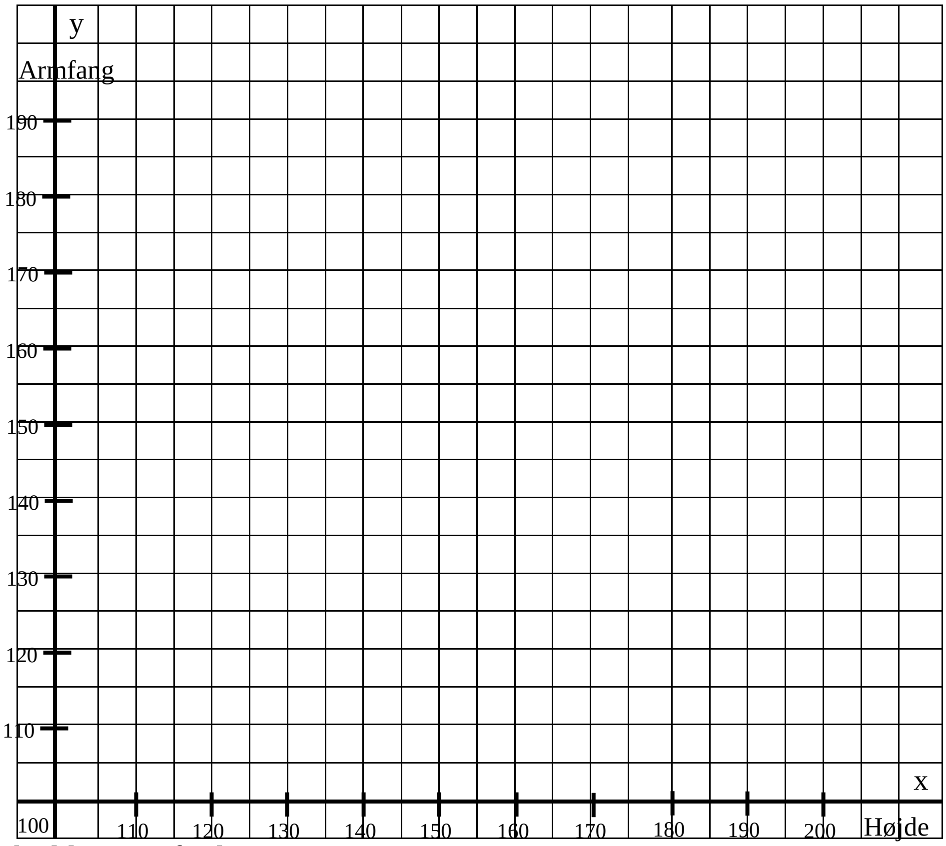
Facit: Timeløn, Kilometer pr Liter Benzin, Massefylde

Opgave 10: Undersøgelse af proportionalitet i et menneske

Vi skal nu i gang med at undersøge om en persons højde er ligefrem proportional med vedkommendes afstand fra fingerspids til fingerspids altså armfang. For at gøre dette er vi nød til måle alle elevers højde og tilhørende armfang som plottes ind i nedenstående skema:

Elev	Højde (cm)	Armfang (cm)	Elev	Højde (cm)	Armfang (cm)
1			14		
2			15		
3			16		
4			17		
5			18		
6			19		
7			20		
8			21		
9			22		
10			23		
11			24		
12			25		
13			26		

Plot punkterne ind og se om de følger en ret linje! Nogle af punkterne vil ligge over linjen og andre under. Dette er helt okay – så længe flertallet følger tendensen.

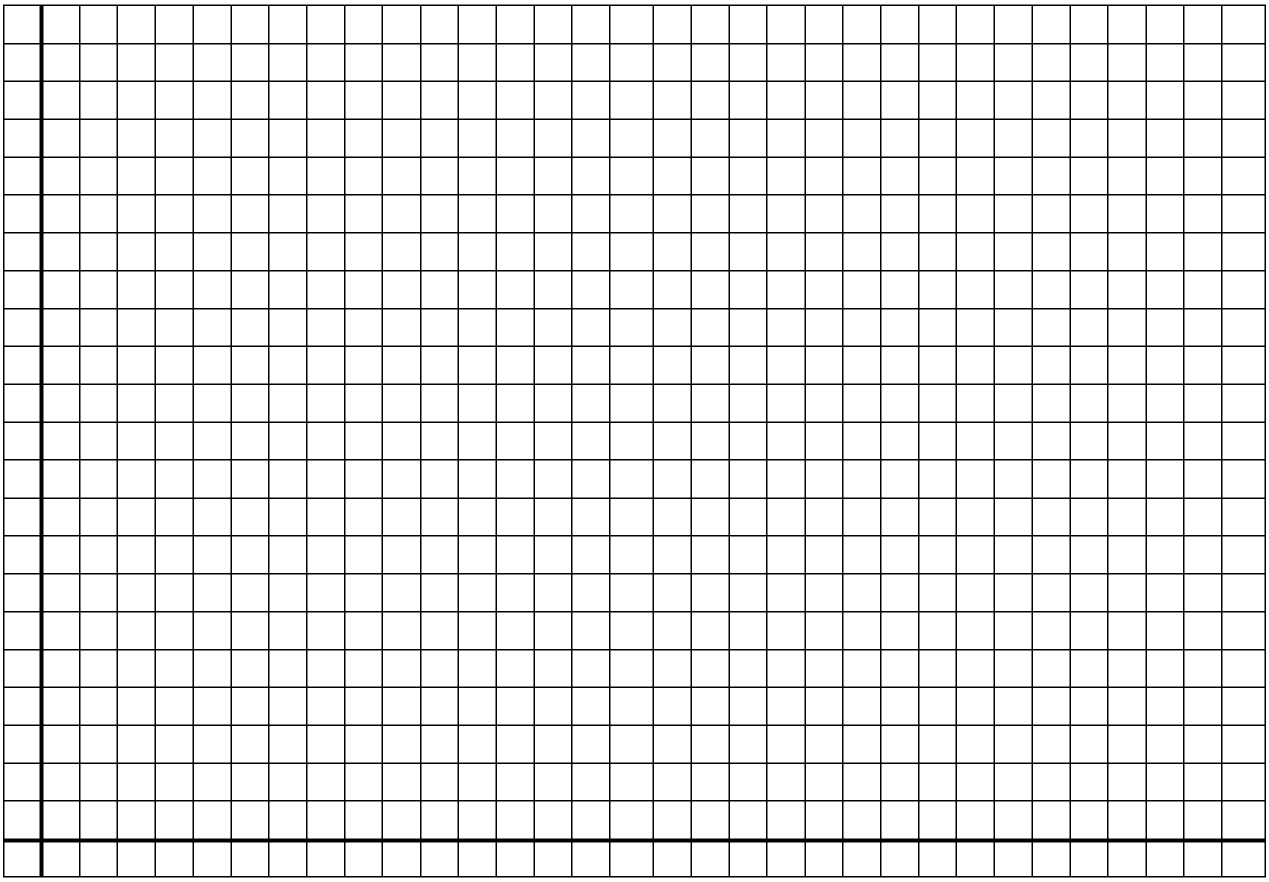


Beregn/aflæs hældningen for linjen: _______

Ekstra Opgave 2: Lav din egen undersøgelse af et proportionalt forhold. Det kan være noget med kroppen men andre ting er også muligt. Mangles inspiration kan følgende bruges:

- Håndlængde & Højde.
- Kranie omkreds & Afstand mellem øjnene

Nr			**Nr**		
1			14		
2			15		
3			16		
4			17		
5			18		
6			19		
7			20		
8			21		
9			22		
10			23		
11			24		
12			25		
13			26		



Beregn/Aflæs hældningen for linjen: ________

Omvendt Proportionalitet:

Når to forhold påvirker hinanden på en sådan måde, at når det ene forhold fordobles så halveres det andet kaldes forholdet for Omvendt Proportionalt. Dvs. hvis *en fordobling af x giver en halvering af f(x)* siges det at x og f(x) er omvendt proportionale. Dette kan også udtrykkes med ligningen:

$$f(x) = \frac{a}{x}$$ (hvor a = en konstant dvs. et tal som ikke ændres)

Opgave 11: Tegn de omvendt proportionale funktioner:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

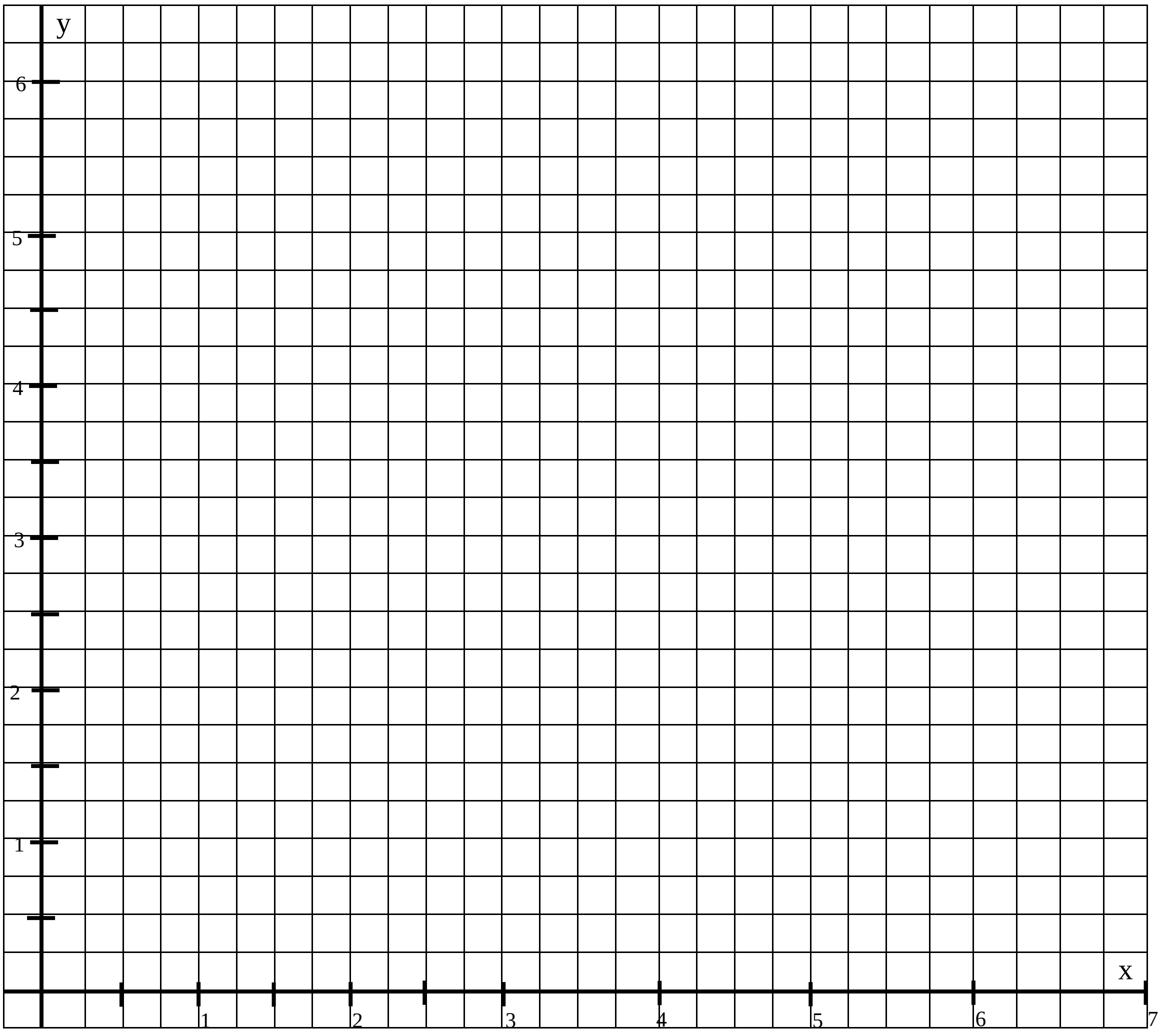
x	0,2	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7
y											

b) $f(x) = \frac{2}{x}$

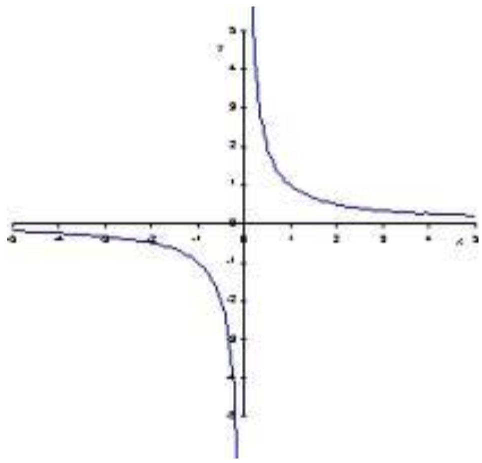
x	0,3	0,5	0,8	1	1,5	2	3	4	5	6	7
y											

c) $f(x) = \frac{3}{x}$

x	0,5	0,75	1	1,5	2	3	4	5	6	6,5	7
y											



Hyperblen & Omvendt proportionalitet:



På forrige side så vi kun på hvordan grafen for en omvendt proportionalitet så ud for positive værdier af x. For negative værdier gælder selvfølgelig det samme blot med negativ fortegn. Dvs. at grafen spejles som vist her.

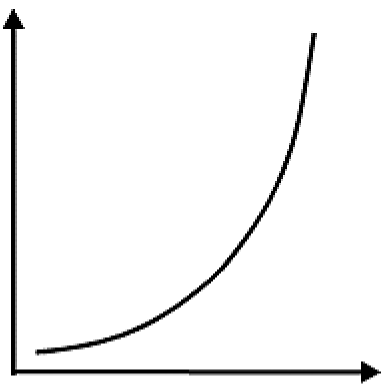
En sådan graf kaldes også for en **hyperbel**.
Det specielle ved grafen er at den aldrig kommer op og krydser hverken x aksen eller y aksen.

Eksempler på omvendt proportionale forhold:

- **Fart & Tid:** Hvis en bil skal tilbagelægge 100 km tager det 2 timer med en fart på 50 km/t. Ved 100 km/t tager det blot 1 time. Dvs. bilens Fart og Tiden er omvendt proportionale forhold!
  - Fart = $\frac{Strækning}{Tid}$ hvis altså strækningen er konstant (100 km)
- **Batteri & Snakketid:** Jo mere man snakker i mobil jo mindre batteri er der tilbage.
- **Læring & Viden:** Jo mere man lærer jo mindre ved man.

Kan du selv komme på flere eksempler: ____

Eksponentiel Udvikling:



En graf som har en eksponentiel udvikling har følgende ligning:

$f(x) = b * a^x$

Grafen kan enten være:

Eksponentiel **aftagende** (hvis a er mindre end 1) eller

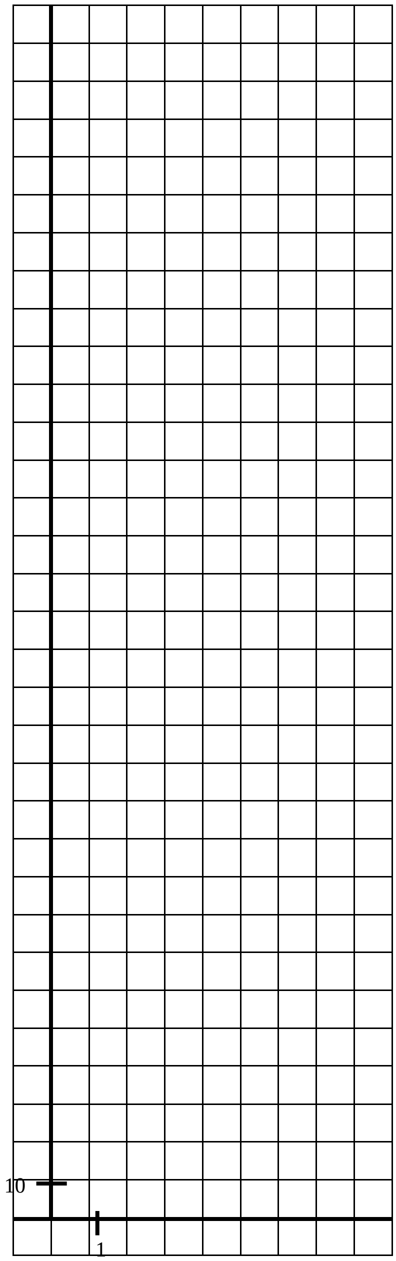
Eksponentiel **voksende** (hvis a er større end 1)

Eksempler på eksponentielle funktioner:

- $f(x) = 2^x$ (voksende)
- $f(x) = 3^x$ (voksende)
- $f(x) = 0{,}5^x$ (aftagende)

Opgave 12: Tegn grafen for $f(x) = 2^x$

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)								



Prøv også at taste følgende ind på lommeregneren:

2^{10} = ______

2^{20} = __________________

2^{30} = ____________________________

Eksempler på eksponentiel udvikling:

- **Bakterier:** Når celler og bakterier deler sig følger de en eksponentiel udvikling. 1 deler sig til 2. De to deler sig igen til 4. De 4 deler sig igen til 8 osv.
- Befolkningsvæksten kan også følge en eksponentiel udvikling.

Opgave 13: Når en bakteriecelle deler sig følger den en eksponentiel forskrift som ser ud som følger:

$f(x) = 2^x$

I en pølse er der 1 bakterie. Denne bakterie er 1 time om at dele sig. *Hvor mange bakterier er denne ene bakterie blevet til i pølsen efter et døgn (24 timer)?*

Hvis bakterien blot er ½ time om at dele sig hvor mange bakterier er der så i pølsen efter et døgn?

Ekstra Opgave 3: Hvor mange timer går der førend 1 bakterier er blevet til 1 mia. bakterier når bakterien har en delingstid på 1 time! (logartime kan benyttes her!)

Facit: 1.223.645 16.777.216   281.474.976.700.000

Andengradsligningen & Parablen:

En andengradsligning er en ligning som indeholder et x sat i anden potens (også kaldt et *andengradspolynomium*). Den simpleste andengradsligning ser derfor ud som følger:

$$f(x) = x^2$$

Andre eksempler kunne være:

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

En andengradsligning kan ligesom de forrige også tegnes i et koordinatsystem og her danner den det som kaldes for en parabel.

På lommeregner: $(-5)^2 = 25$

Opgave 14: Tegn andengradsligningerne.

a) $y = 1x^2$

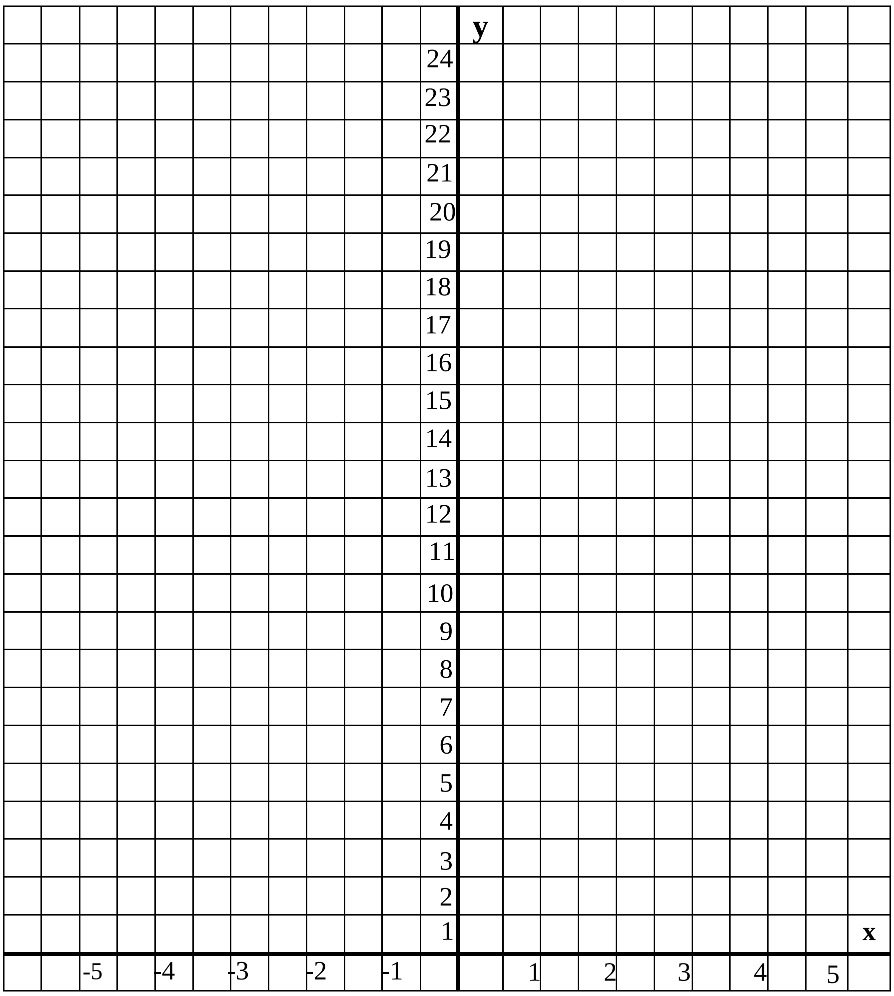
x	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4	5
y													

b) $y = 2x^2$

x	-3	-2	-1.5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	3
y											

c) $y = -x^2 + 25$

x	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4	5
y													

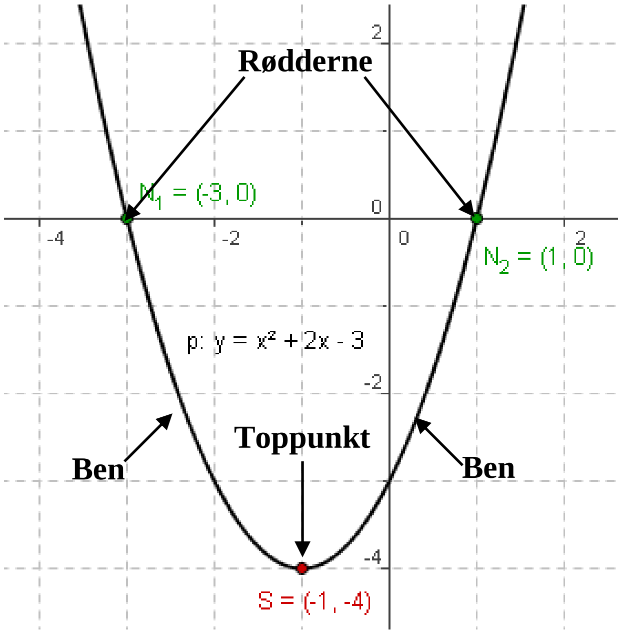


Til højre er tegnet andengradsligningen:

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

En parabel kan beskrives ved:

- **Toppunkt:** Det punkt hvorom parablen er symmetrisk. (burde vel hedde bundpunkt)
- **Ben:** Hvis benene vender opad siges parablen at være glad. Hvis benene vender nedad siges den at være sur.
- **Rødderne:** findes hvor parablen skærer x akslen. Hvis parablen ligger over x-akslen har den ingen rødder!

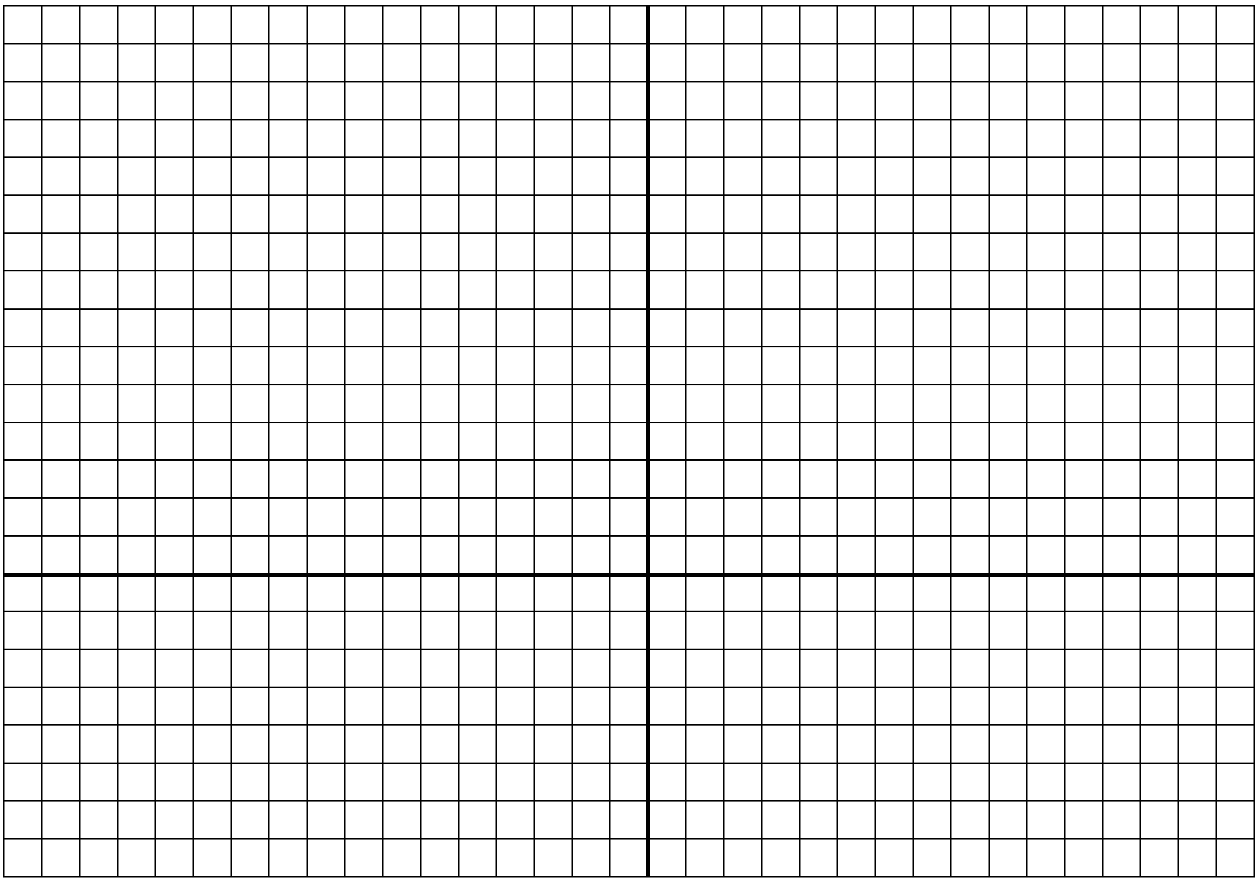


Opgave 15: Tegn andengradsligningerne og aflæs rødderne. Vælg selv inddeling af x og y aksen.

a) $f(x) = x^2 - 4$ rod1 = ___, rod2 = ___ (altså der hvor grafen skærer x aksen)

b) $f(x) = -1x^2 + 4$ rod1 = ___, rod2 = ___

c) $f(x) = x^2 + 2$ rod1 = ___, rod2 = ___



Facit: -3, -2, -2, 2, 2, 3

Overvej følgende:

- Hvilken betydning har det tal som står foran x^2? ___________________________________
- Hvilken betydning har det tal som lægges til x^2? ___________________________________
- Hvad betyder det om tallet foran x^2 er negativt? ___________________________________

Løsning af en andengradsligning:

Når man skal løse en andengradsligning *skal man finde rødderne*. Dvs. man skal finder det punkt hvor parablen skærer x-akslen. Man kan derfor altid løse en andengradsligning ved at tegne den vha. et sildeben og aflæse punkterne hvor parablen skærer x aksen. Dog er det ikke altid nemt og derfor kan det være godt at have en løsning hvor man kan beregne rødderne – uden at tegne den.

I det følgende vises hvordan man kan løse en andengradsligning

Løsningen:

$ax^2 + bx – c = 0$

a, b og c er konstanter

Vi beregner først det vi kalder diskriminanten d:

$d = b^2 – (4 * a * c)$

Hvis:

$d > 0$ er der 2 løsninger (2 rødder)

$d = 0$ er der 1 løsning (1 rod)

$d < 0$ er der ingen løsninger

Vi kan beregne rødder, som vi kalder x_1 og x_2, ved:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2*a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2*a}$$

Eksempel:

$1x^2 + 1x – 2 = 0$

$a = 1, b = 1, c = -2$

$d = 1^2 – (4 * 1 * -2)$

$d = 1 – (-8) = 1+8 = 9$

$d > 0$ og ligningen har 2 løsninger!

Vi sætter 9 ind i formlen.

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2*1} = 1, \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2*1} = -2$$

Fremgangsmåde:

$ax^2 + bx + c = 0$

$d = b^2 – 4ac$

$d > 0$ er der 2 løsninger

$d = 0$ er der 1 løsning

$d < 0$ er der ingen løsninger

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$$

Pas på din lommeregner!

$-7^2 = -7 * -7 = 49$

Men når du taster det ind på lommeregneren

-7^2 = -49

Det er jo forkert!

Husk derfor parenteserne!

(-7)^2 = 49

Opgave 16: Løs andengradsligningerne – dvs. find rødderne.

a) $-1x^2 + 1x + 6 = 0$

a = ___, b = ___, c = ___.

d =

d = ___

Hvor mange løsninger: ____

x_1 = x_2 =

b) $1x^2 - 7x + 12 = 0$ **pas på** $(-7)^2 = 49$

a = ___, b = ___, c = ___.

d =

d = ___

Hvor mange løsninger: ____

x_1 = x_2 =

c) $2x^2 - 10x + 8 = 0$

a = ___, b = ___, c = ___.

d =

d = ___

Hvor mange løsninger: ____

x_1 = x_2 =

d) $-1x^2 + 4x - 5 = 0$

a = ___, b = ___, c = ___.

d =

d = ___

Hvor mange løsninger: ____

x_1 = x_2 =

e) $1x^2 + 4x + 4 = 0$

a = ___, b = ___, c = ___.

d =

d = ___

Hvor mange løsninger: ____

x_1 = x_2 =

f) $1x^2 - 25 = 0$

a = ___, b = ___, c = ___.

d =

d = ___

Hvor mange løsninger: ____

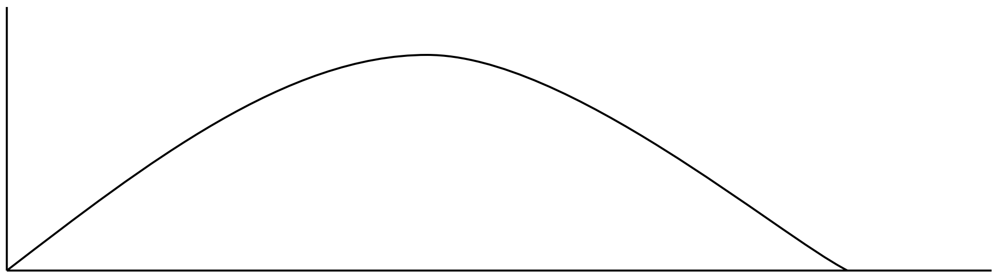
x_1 = x_2 =

Opgave 17: Når man sparker til en bold følger dens bane en parabel. En bold bliver sparket og følger parablen $f(x) = ½\, x^2 - 10x$. Beregn hvor langt væk bolden lander fra det sted den bliver sparket fra? (husk c = 0)

$½\, x^2 - 10x = 0$

d =

x =



Facit: (-2) (-2, 3) (1, 1) (3, 2) (4, 1) (4, 3) (5, -5) (ingen løsning) 20 105

Opgave 18: Løs andengradsligningerne – dvs. find rødderne.

a) $1x^2 + 7x + 6 = 0$

a = ___, b = ___, c = ___.

d =

d = ___

Hvor mange løsninger: _____

$x_1 =$ $x_2 =$

b) $1x^2 + 9x + 8 = 0$

a = ___, b = ___, c = ___.

d =

d = ___

Hvor mange løsninger: _____

$x_1 =$ $x_2 =$

c) $3x^2 – 10x + 3 = 0$

a = ___, b = ___, c = ___.

d =

d = ___

Hvor mange løsninger: _____

$x_1 =$ $x_2 =$

d) $½ x^2 + 6x + 10 = 0$

a = ___, b = ___, c = ___.

d =

d = ___

Hvor mange løsninger: _____

$x_1 =$ $x_2 =$

e) $1x^2 – 10x + 16 = 0$

a = ___, b = ___, c = ___.

d =

d = ___

Hvor mange løsninger: _____

$x_1 =$ $x_2 =$

f) $-2x^2 – 6x – 2,5 = 0$

a = ___, b = ___, c = ___.

d =

d = ___

Hvor mange løsninger: _____

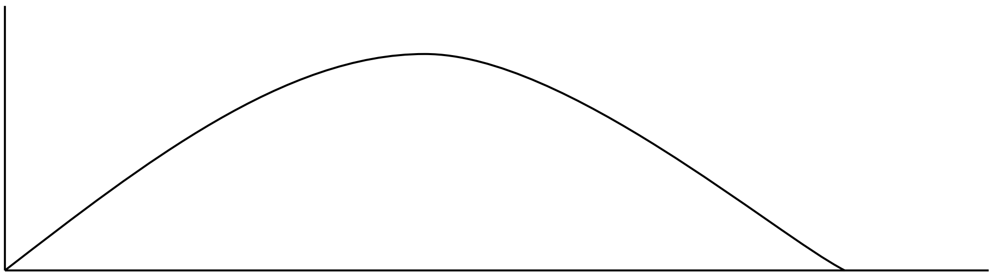
$x_1 =$ $x_2 =$

Opgave 19: En golfbold følger følgende bane i slaget: $f(x) = -0,004x^2 + 0,4x$. Bestem hvor langt golfbolden når fra golf-tee'en?

$-0,004x^2 + 0,4x = 0$

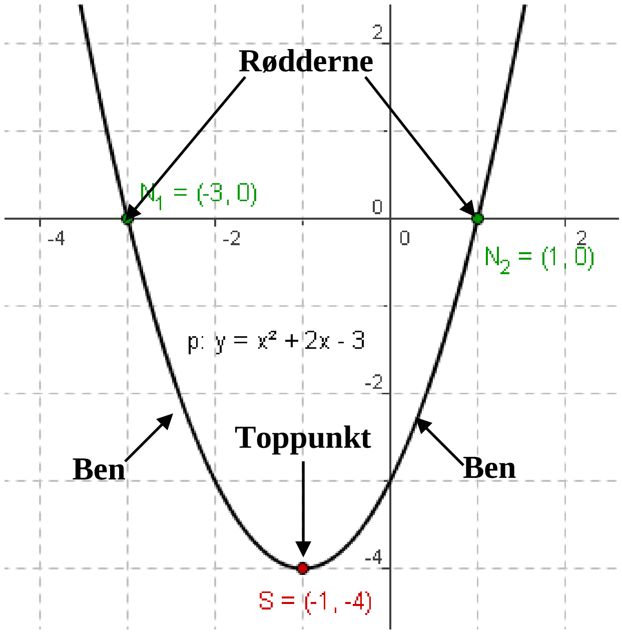
d =

x =



Facit: (-10, -2) (-1,-8) (-6, -1) (-2 ½, - ½) (0, 3) (1/3, 3) (2, 8) 100 220

Parablens Toppunkt:



Alle parabler har et toppunkt eller bundpunkt om man vil. Dette toppunkt kan beregnes ved brug af følgende formel:

$$(x, y) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-d}{4a}\right) \text{ hvor } d = b^2 - 4*a*c$$

Lad os tage et eksempel:

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

Først finder vi a, b, c

a = 1, b = 2, c = -3

Så beregnes diskriminanten d:

$d = 2^2 - 4 * 1 * -3 = 4 - (-12) = 4 + 12 = 16$

Så sættes ind i formlen:

$$(x, y) = \left(\frac{-2}{2*1}, \frac{-16}{4*1}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{-16}{4}\right) = (-1, -4) \Rightarrow \text{ Toppunktet er derfor } (-1, -4)$$

Opgave 20: Find toppunktet for andengradsligningerne:

a) $-1x^2 + 4x - 3 = 0$

a = ___, b = ___, c = ___.

d =

d = ___

x = y =

b) $1x^2 - 6x + 2 = 0$

a = ___, b = ___, c = ___.

d =

d = ___

x = y =

c) $2x^2 + 4x + 2 = 0$

a = ___, b = ___, c = ___.

d =

d = ___

x = y =

d) $x^2 + 8x + 9 = 0$

a = ___, b = ___, c = ___.

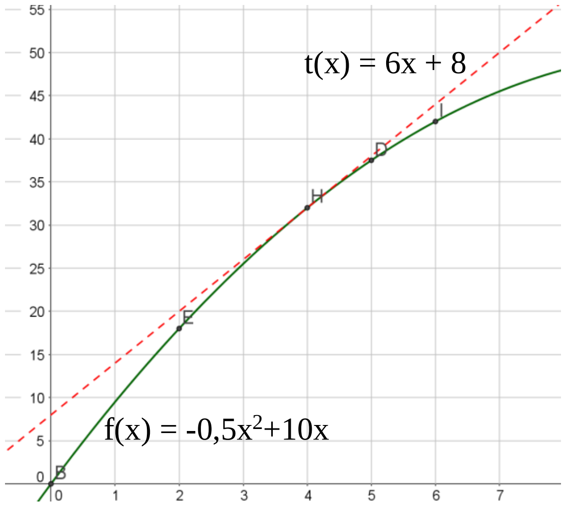
d =

d = ___

x = y =

Opgave 21: I opg. 18 fløj en golfbold igennem luften efter følgende parabel: $(x) = -0{,}004x^2 + 0{,}4x$
Beregn golfboldens maksimale højde den når på sin vej? Hint: Toppunkt!

Facit: (-4, -7) (-3, 2) (-1, 0) (2,1) (3, -7) 5, 10 40



Tangent til hver af punkterne i funktionen:

På billedet til højre ses en parabel (andengradsfunktion):

$f(x) = -0{,}5x^2 + 10x + 0$

Parablen består af en masse punkter. Et af dem er punkt H (4, 32). Til hvert af punkterne kan man lægge en tangent ind. På billedet er der lagt en tangent ind til punktet H (rød stiplet linje).

$t(x) = 6x + 8$

Nu findes der jo uendelig mange punkter i en parabel og derfor også uendelige tangenter til disse punkter. Man kan jo altid tegne parablen og dens tangenter men man kan også bruge differentialregning til at beregne hver af tangenternes hældning.

Differentialregning & Tangenterne:

Når man differentierer en funktion får man en anden funktion som man kan bruge til, at finde hældningen af tangenterne til hver af punkterne i den differentierede funktion. Lad os se på hvilke regler der gælder når man differentiere en funktion:

1. Den differentierede funktion benævnes f'(x) udtales "f mærke"
2. Hel tal forsvinder i den differentierede funktion
3. Eksponenten til x multipliceres med tallet der står foran x (altså koefficienten)
4. Der trækkes en fra eksponenten.

   Eksempel 1: $3x^2$ differentieres til $2 * 3x^{(2-1)} = 6x^1 = 6x$

   Eksempel 2: $3x^1$ differentieres til $1 * 3x^{(1-1)} = 3x^0 = 3$ (fordi x^0 er 1 f.eks. $2^0 = 1$)

Lad os differentiere andengradsligningen:

$f(x) = -0{,}5x^2 + 10x^1 + 0$

$f'(x) = 2 * -0{,}5x^{(2-1)} + 1 * 10x^{(1-1)}$

$f'(x) = -1x^1 + 10x^0$ (vi husker x^0 er 1 og x^1 er x)

$f'(x) = -1x + 10$

Med denne funktion f' kan man beregne hældningen til tangenterne i hver af punkterne. Lad os prøve at se om vi kan finde hældningen til tangenten i punkt H (4, 32). Vi sætter 4 ind i f'(x)

$f'(4) = -1*4 + 10 = 6$

Dvs. at hældningen til tangenten er 6 hvilket vi kan se må passe eftersom at tangentens funktion er 6x + 8

Eksempel på differentiering af tilfældig andegradsfunktion:

$F(x) = 3x^2 + 4x + 8$

$f'(x) = 2 * 3x^{(2-1)} + 1 * 4x^{(1-1)}$

$f'(x) = 6x^1 + 4x^0$

$f'(x) = 6x + 4$

Opgave 22: Differentier funktionerne

a) $f(x) = 4x^2$

$f'(x) =$ ______________

b) $g(x) = 3x^2 - 6x$

$g'(x) =$ ______________

c) $h(x) = 2x^2 + 7x + 4$

$h'(x) =$ ______________

d) $t(x) = -6x^2 – 4x + 13$

$t'(x) =$ ______________

e) $k(x) = 5x^2 + 4$

$k'(x) =$ ______________

f) $m(x) = 6x + 8$

$m'(x) =$ ______________

Eksempel på differentiering af tredjegradsfunktioner og højere.

$f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 8$

$f'(x) = 3 * 2x^{(3-1)} + 2 * 4x^{(2-1)} + 1 * 5x^{(1-1)}$

$f'(x) = 6x^2 + 8x + 5$

Ekstra Opgave 4: Differentier funktionerne

a) $f(x) = 3x^3 – x^2 + 4x$

$f'(x) =$ ______________

b) $g(x) = 4x^3 + 6x^2 – 7x + 4$

$g'(x) =$ ______________

c) $h(x) = 2x^4 + 5x + 4$

$h'(x) =$ ______________

d) $t(x) = -4x^4 – 5x^2$

$t'(x) =$ ______________

Ekstra Opgave 5: Differentier funktionen $f(x) = 3x^2 + 4x$ og beregn hældningen for tangenten i punkt H(5, 95) dvs. sæt x = 5 ind i funktionen f'(x)

$f'(x) =$

$f'(5) =$

Facit: (6) (34) (-12x-4) ($-16x^3-10x$) (-3x + 8) (4x+7) (5x + 8) (6x – 6) (6x+4) (8x) (10x) ($9x^2-2x+4$) ($6x^2+8x$) ($12x^2+12x-7$) ($8x^3+5$) ($10x^3+3x$)

Grafisk Problemløsning:

Det revolutionerende ved funktioner er ikke de rette linjer eller parabler men det faktum, at hverdagens matematiske problemer nemt kan løses ved funktioner! Fidusen er at oversætte problemet til funktioner for herefter grafisk at finde løsningen! Lad os tag et eksempel:

Eksempel: Taxi kørsel.

En mand skal med taxi og har valget imellem to taxier:

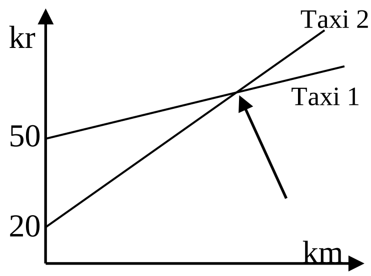
- **Taxi 1:** koster 10 kr pr kørt km og 50 kr i startgebyr!
- **Taxi 2:** koster 15 kr pr kørt km og 20 kr i startgebyr

Dilemmaet for manden er hvilken taxi han skal vælge? *Svaret er selvfølgelig, at det kommer an på hvor langt han skal køre?* Hvis han ikke skal så langt skal han jo vælge Taxi 2 da startgebyret er billigere end i Taxi 1! Derimod hvis han skal ud på en lang tur så vil taxi 1 blive billigere! Spørgsmålet for manden er derfor *hvornår Taxi 1 bliver billigere end Taxi 2*!

At oversætte virkeligheden til en funktion:

Prisen for taxi 1 og 2 afhænger af hvor mange km man kører! Det er klart, at hvis man vil køre 5 km med taxi 1 må prisen være $10 * 5 + 50 = 100$ kr, hvorimod det med taxi 2 er $15 * 5 + 20 = 50$ kr! Men længden af turen kan variere og derfor må den være vores x! Vi får altså følgende funktioner:

- **Taxi 1:** $f(x) = 10x + 50$
- **Taxi 2:** $g(x) = 15x + 20$



Disse to funktioner kan man tegne som to rette linjer i et koordinatsystem med kr ud af y aksen og km ud af x aksen! (det hedder jo kr (y) pr km (x). Linjerne vil her skære hinanden i et punkt (se figur) og i dette punkt bliver Taxi 1 billigere end Taxi 2.

Man kan nemt tegne dette i et graf program som f.eks. geogebra - men man kan også beregne linjernes skæringspunkt ved, at sætte dem lig hinanden da de jo er ens i punktet!

$10x + 50 = 15x + 20$

$10x + 50 - 15x = 20$

$-5x + 50 = 20$

$-5x = 20 - 50$

$-5x = -30$

$x = -30/-5 = 6$

I hånden

Geogebra

Hvis man derfor skal køre mere end 6 km bliver Taxi 1 altså billigere!

Opgave 23: Løs stykkerne ved at anvende funktioner. Løsningen kan beregnes vha. beregne linjernes skæringspunkt eller ved at bruge geogebra!

a) Hvor mange km skal man køre før Taxi 1 bliver billigere end Taxi 2:
- **Taxi 1:** koster 5 kr pr kørt km og 100 kr i startgebyr!
- **Taxi 2:** koster 30 kr pr kørt km og 5 kr i startgebyr

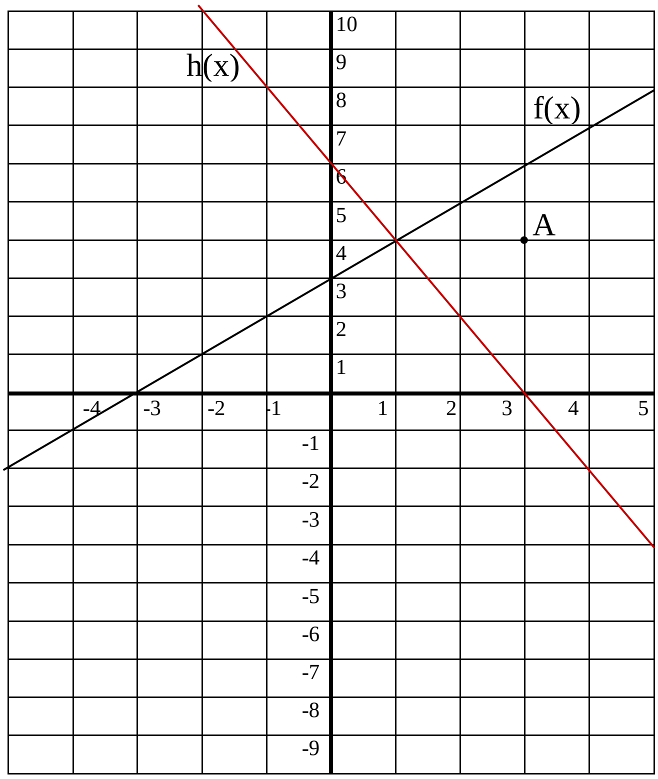
b) Tilde skal have et nyt mobil abonnement. Hvor mange timer skal Tilde tale i mobil om måneden før mobil 1 bliver billigere end mobil 2!
- Mobil 1: 0,1 kr pr minut Abonnement 200 kr pr måned
- Mobil 2: 0,3 kr pr minut Abonnement 0 kr pr måned

c) Jonas skal købe et nyt TV! Hvor mange timer skal han se TV før TV 1 bliver billigere end TV2? **HUSK:** kr (y) pr time (x)
- TV 1: koster 3.600 kr og bruger 0,15 kr pr time (75 Watt)
- TV 2: koster 2.500 kr og bruger 0,34 kr pr time (170 Watt)

d) Amanda skal købe ny bil. Hvormange km skal Amanda køre i Bil 1 før den bliver billigere end Bil 2? **Hint:** Du skal lave km pr liter om til kr pr km! Altså hvad det koster at køre 1 km!
- Bil 1: koster 150.000 kr og køre 20 km pr liter diesel (til 10 kr pr liter)
- Bil 2: koster 90.000 kr og køre 12 km pr liter benzin (til 12 kr pr liter)

Ekstra Opgave 6:
- Hvor mange år går der førend TV 1 bliver billigere end TV 2 i opgave 21c når det gælder, at Jonas gennemsnitligt ser 4 timers TV om dagen?
- Hvor mange år går der førend Bil 1 bliver billigere end Bil 2 hvis Amanda gennemsnitligt kører 20.000 km om året i sin nye bil!

Facit: 1 3,8 4 6 12 16,67 20,58 3.729 5.789 120.000 320.000



Opgave 24: Repetitions opgaver

a) Skriv et x ved x-aksen & et y ved y-aksen

b) Aflæs koordinatsættet til punkt A?
A(,   )

c) Afsæt punktet B (-2, 5) & C (4, -6)

d) Hvad er hældningen i funktionen
$g(x) = 3x + 7$
hældning = ______

e) Hvor skær den rette linje y- aksen
$y = 4x – 5$
Skæring med y-aksen: ______

f) Aflæs linjens ligning for f(x) & h(x) i koordinatsystemet ovenfor.
f(x) = _______________
h(x) = _______________

g) Tegn linjerne i koordinatsystemet ovenfor:
$t(x) = 2x$
$k(x) = x – 4$
Hvad er x koordinaten til de to linjers skæringspunkt? x = _____

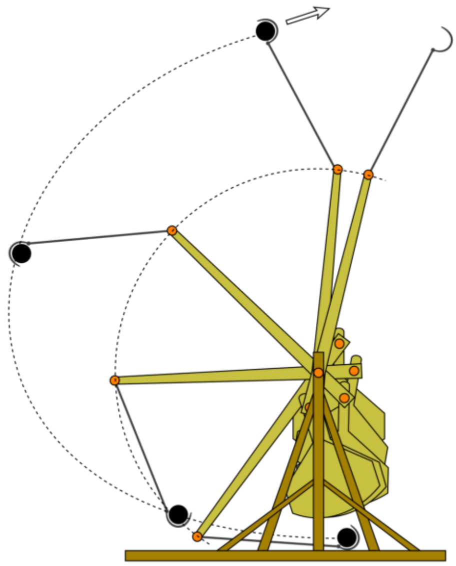
e) En andengradsfunktion er som følgende $f(x) = 3x^2+4x+5$. Beregn værdien af f(x) når x = 3
f(3) = ________________ = _____

f) Indtegn andengrafsfunktionen $m(x) = x^2 – 9$ i koordinatsystemet ovenfor?

g) Hvilke 2 rødder har m(x). x_1 = _____ & x_2 = _____

Ekstra Opgave 7: Beregn skæringspunktet mellem $f(x) = 3x – 4$ & $g(x) = -2x + 11$ ved at bruge ligninger

Facit: (-2, 5) (3,4) (3, 5) -5 -4 -3 3 3 44 (-2x+6) (x+3)



Ekstra Opgave 8: Bliden

Når en blide affyres (se billedet) følger kuglen en parabel bane med funktionen:

$f(x) = -0{,}003x^2 + 1{,}11x$

hvor x = antal meter fra bliden &

$f(x)$ = højden af kuglen over jorden

a) Find ud af hvor højt kuglen når op i luften (altså toppunktet)?

b) Hvor langt når kuglen væk fra bliden?

c) Kuglen som affyres har en radius på 1,5 dm. Hvad er kuglens rumfang i cm^3?

d) Kuglen er lavet af granit med en massefylde på 2,75 g/cm^3. Hvad vejer kuglen?

Kuglen har på sit højeste punkt (se opg a) i kastet maksimal potentielenergi (beliggenhedsenergi). Denne potentielleenergi kan beregnes vha. følgende formel:

Epot = m * g * h

Hvor:
- m = massen (kg)
- g = 9,82 m/s2 (tyngdeacceleration)
- h = højden (meter)
- Epot = Potentiel energi (Joule J)

e) Beregn den potentielle energi i kJ for kuglen på det højeste sted i kastet?

Facit: 20 38,9 39,2 50,2 102,68 370 5.689 14.137

Mundtlig Matematik: Varmepumpe eller ej?

Du har et hus på landet som er fra 1975 som har været billig at købe men desværre bruger du en masse penge på at varme huset op om vinteren. Dit problem er, at der i en tilbygning, ikke er anden opvarmning end dyre varmeapparater (elpaneler). Du overvejer at skifte dine energi-slugende varmeapparater ud med en varmepumpe (se billede)

Spørgsmål:

- *Undersøg hvor meget det koster at varme tilbygningen op med varmeapparater om året?*
- *Opstil en funktion og dens graf (f.eks. i geogebra) for udgifterne til opvarmning over tid?*
- *Opstil en funktion & graf for udgifterne over tid for hver af varmepumperne?*
- *Vurder hvilken varmepumpe der ville være den bedste investering?*
- *Hvis huset var et sommerhus der brugte ½ kwh pr dag for at varme 1m^2 op, ville det så være en god ide at købe en varmepumpe til tilbygningen nu når man ikke brugte huset hver dag?*

Tilbygningens mål: bredde = 6 m, længde = 8,9 m

Energi forbrug ved varmeapparater: 110 kWh pr m^2 pr år.

Elektricitet & Omkostninger:

Når man bruger strøm måles ens forbrug i kWh som står for KiloWattTimer (KiloWattHour).

Når man skal betale for det strøm man bruger koster det følgende: **1 kWh = 2,1 kr**

Varmepumpe Priser:

Varmepumpe	Pris inklusiv installation	SCOP værdi
Panasonic VZ9SKE	24.494 kr	6,2
Toshiba Daiseikai 8-25	15.345 kr	5,33
Panasonic NZ9SKE	12.990 kr	4,6
Qlima S3425	8.388 kr	4,0

Hvad betyder varmepumpens SCOP værdi:

SCOP værdien fortæller, hvor meget varme varmepumpen kan få ud af den elektricitet den bruger. Dvs. jo højere SCOP værdien er jo bedre!

Hvis man har en varmepumpe med SCOP værdi på 3,0 betyder det, at hvis man putter 1 kWh (energi) ind i varmepumpen lever den, den samme varme som et varmeapparat der har brugt 3 kWh. Sagt på en anden måde hvis et varmeapparat var tændt i 1 time så behøver varmepumpen kun være tændt i 1/3 time (fordi SCOP er på 3) – det er her pengene kan spares!

Hvis man derfor installere en varmepumpe med SCOP 3,0 vil de **110 kWh pr m^2 pr år** blive reduceret til 110/3 = **36,7 kWh pr m^2 pr år** (ved varmepumpe på scop 3)