Navn: _______________ Klasse: ____

Matematik Opgave Kompendium

Økonomi 1

(Vækst & Procenter)

Kompendiet indeholder:
- Procentregning
- Momsberegninger
- Valuta & Kurser
- Penge & Renter
- Rentesregning (vækstformel)
- Rente pr dag, måned og år
- Inflation
- Procentvis vækst
- Negativ procentvis vækst
- Beregning af
    - Startværdi
    - Vækst procent
- Samlet vækst
- Gennemsnitlig vækst
- Beregning af n (terminer)
- Opsparing (annuitet)
- Lån (Annuitet)

Opgaver: 33

Ekstra: 9

Mdt: 8

Point: _____

Matematik & Samfundsdebatten:

Det er vigtigt for et demokrati at borgerne er i stand til, at sætte sig ind i samfundsdebatten og kunne forstå de oftest tekniske diskussioner! I denne debat bruges ofte procenter, brøker og vækst-snak som vigtige argumenter! Hvis borgerne ikke kan forstå diskussionen er der stor chance for, at de bliver nemme at manipulerer med da de ikke er i stand til at gennemskue debatten! Derfor er matematik et så uhørt vigtigt fag - da det giver redskaberne til at forstå de tal som oftest politikere og økonomer slynger om sig med!

Nyheder & brøker & Procenter:

Ofte når man hører eller læser nyheder kan man finde udtryk som:

1 ud af 5 kirurger vaskede ikke hænder på toilettet

Det lyder ulækkert men hvordan skal det forstås? Der er selvfølgelig her tale om en brøk $\frac{1}{5}$ og ved at denne brøk svarer til 20 %! Hvilket man kan regne ud ved at sige 1/5 *100 på sin lommeregner - *eller tænke 5 mennesker skal dele 100 kr hvad får de hver - 20 kr?*

Opgave 1: Oversæt udsagn hentet fra nyhederne til en brøk og skriv derefter da procentsatsen!

a) *3 ud af 5 børnefamilier laver mad sammen*

Brøk = = ______ %

b) *1 ud af 10 børn med sprogproblemer er danske?*

Brøk = = ______ %

c) *Hver 3 unge har haft en kønssygdom*

Brøk = = ______ %

d) *3 ud af 4 ungdomskriminelle får en dom igen*

Brøk = = ______ %

e) *Kun 1 ud af 25 unge tager stoffer*

Brøk = = ______ %

Hvad behøves lært udenad?

- $\frac{1}{2} = 50$ %
- $\frac{1}{3} = 33{,}33$ %
- $\frac{1}{5} = 20$ %

Herved kan man hurtigt se at 2/5 må være 40 % (20 % + 20%) osv.
Man ved også hvad 1/4 er da dette er halvdelen af 1/2 altså 25 %!
Ligeledes må 1/8 være halvdelen af 1/4! Og ja 1/20 er halvdelen af 1/10 som er halvdelen af 1/5!

Opgave 2: Lav procentsatsen om til en brøk og et udsagn.

a) 25 % = = ___ ud af ____

b) 50 % = = ___ ud af ____

c) 30 % = = ___ ud af ____

d) 66 % = = ___ ud af ____

e) 12,5 % = = ___ ud af ____

f) 80 % = = ___ ud af ____

g) 5 % = = ___ ud af ____

h) 40 % = = ___ ud af ____

Facit: ½ 2/3 ¼ 2/5 4/5 1/7 1/8 3/10 6/10 1/20 3/25 4 6 10 33 60 67 75 100

At tage procenten af et tal også kaldt Procentdelen eller blot delen:

Når skal finde procenten af et tal skal man forestille sig at tallet skal deles imellem 100 mennesker! Procent betyder jo *per 100*! Hver af disse 100 mennesker svarer til 1 %! Når man ved hvad 1 % svarer til kan man også finde hvilken som helst anden procentsats! Lad os tage 20 % af 300kr.

100 % = 300 kr

1 % = 300 / 100 = 3 kr.

Vi ved nu, at hvis 300 kr skal deles imellem 100 mennesker fpr de hver 3 kr! Herefter kan man jo også nemt finde ud af hvor mange kr f.eks 20 mennesker altså 20 % er:

20 % = 20 % * 3 kr = 60 kr

Opgave 3: Brug hovedregning til at finde procentdelen?

a) 20 % af 100 kr = ____
b) 30 % af 200 kr = ____
c) 10 % af 10 kr = _____
d) 25 % af 300 kr =_____
e) 90 % af 200 kr = ____
f) 20 % af 600 kr = ____
g) 10 % af 150 kr = ____
h) 30 % af 220 kr = ____
i) 40 % af 250 kr = ____

Hvis vi kigger på udregningen ovenfor ses det, at man først dividerer tallet (det hele) med 100 % for derefter at gange resultatet med %'en - det kan man samle i en formel

$$Del = \frac{\%}{100} * Hele$$

Eks: 25 % af 200 kr = 0,25 * 200 = 50 kr

At dividere med 100 er ikke svært for kommaet flyttes 2 pladser mod venstre!

Opgave 4: Beregn procentdelen vha. lommeregner (afrund til helt tal) - husk 5 % = 0,05

a) 20 % af 8230 = 0,20 * 8230 = ______
b) 34 % af 3380 = = ______
c) 12 % af 8100 = = ______
d) 48 % af 3850 = = ______
e) 62 % af 4585 = = ______
f) 58 % af 3405 = = ______
g) 3 % af 8950 = = ______
h) 105 % af 1800 = = ______
i) 9 % af 5280 = = ______
j) 2 % af 2956 = = ______

Opgave 5: Løs tekst stykket vha. procentregning

a) En mand har fået at vide, at hans løn på 25.000 kr vil stige med 5 %. Hvor meget stiger hans løn med?
b) Han skal til gengæld arbejde 1/8 mere hver dag! Han arbejder fra kl 8:00 til 15:35! Hvor mange flere minutter skal manden arbejde pr dag?

Facit: 1 5 15 20 57 59 60 66 72 75 100 113 120 180 269 475 972 1024 1149 1250 1646 1848 1890 1975 2512 2843

Først var der Omsen & så Momsen: M-oms = Mere omsætningsafgift

Folk med job betaler skat af deres løn til staten! Virksomheder betaler også skat som bl.a. sker gennem det der kaldes moms! Moms er en afgift virksomheden skal betale for, at få lov til at sælge deres vare i Danmark! Alle disse skatter skal staten bruge til at betale sine regninger til politi, hospitaler, plejehjem, skoler, vedligehold af veje osv. - det blev i alt 690 mia kr i 2013.

Momsen lægges oven i varens pris og er i Danmark på 25 %! Dvs. at man skal beregne hvad 25 % (eller ¼) er af salgsprisen og lægge det oveni prisen! Nemmere er det dog at tage 125 % af prisen:

$$\text{Salgspris med moms} = \frac{125\%}{100} * \text{Salgspris uden moms} = 1{,}25 * \text{Salgspris uden moms}$$

Opgave 6: beregn salgsprisen inklusiv moms (afrund til hel antal kr og øre – husk kun 50 øre)

a)	300 kr	= 1,25 *	= _____	e)	1.055 kr	=	= _____
b)	145 kr	=	= _____	f)	4.556 kr	=	= _____
c)	52 kr	=	= _____	g)	367 kr	=	= _____
d)	12 kr	=	= _____	h)	1.312 kr	=	= _____

Momsfritaget varer: taxa, togrejser, flyrejser, bisættelser, forsikringer, aviser, undervisning mm.

Beregning af salgspris uden/ekslusiv moms:

Man kan fristes til at tro at momsen udgør 25 % af *Salgsprisen med moms*. Det er ikke rigtigt idet momsen udgør 20 % af salgsprisen med moms - altså 20 % af den pris du ser i butikken:

100 kr * 1,25 = 125 kr = Salgspris med moms hvor momsen udgør 25 kr.

Dvs. $\frac{25}{125} = \frac{1}{5} = 20\ \%$

Dvs. salgsprisen uden moms må være 100 % - 20 % = 80 % af salgsprisen med moms:

Salgsprisen uden moms = 0,80 * Salgspris med moms

Opgave 7: beregn salgsprisen uden moms (afrund til hel antal kr og øre – husk kun 50 øre)

a)	1319 kr	= 0,8	= _____	e)	65 kr	=	= _____
b)	375 kr	=	= _____	f)	459 kr	=	= _____
c)	181,5 kr	=	= _____	g)	15 kr	=	= _____
d)	5695 kr	=	= _____	h)	1640 kr	=	= _____

Ekstra Opgave 1: Rundetårn er 34,8 meter højt og har en radius på 768 cm**!** Beregn rundetårns rumfang i m^3?

Facit: 12 15 18 52 65 145 181,5 190 300 367 375 459 1.055 1.105 1.312 1.319 1.640 4.556 5.212 5.695 6.285 6.448

At købe/veksle Valuta/Penge: Når man rejser uden for Danmark kan man ikke betale med danske kroner men må benytte den møntfod/Valuta som gælder i landet: i Tyskland Euro €, i England Pund £, og USA Dollar $ osv. Da man jo kun selv har danske kroner er man nød til at købe/bytte penge i den fremmede Valuta/Møntfod med danske kroner og prisen for dette kaldes *kursen*! Når man på denne måde ”køber/bytter” danske kroner til den fremmede valuta kaldes det for *at veksle*!

Valuta Kurser: Kursen for en valuta er altid opgivet i hvad det koster i danske kroner at købe 100 i den fremmede valuta! Kursen for Euro ligger ofte på 750 (eller deromkring). Det betyder at det koster 750 kr, at købe 100 € (Euro).

Euro Kurs 750 = *100 € koster 750 kr* = 1 € koster (750/100) 7,5 kr

Kursen for svenske kroner ligger ofte på 80, hvilket så omvendt betyder at det koster 80 danske kroner at købe 100 svenske kroner!

Svensk Kurs 80 = *100 sv kr koster 80 kr* = 1 sv kr koster (80/100) 0,80 kr

Eksempel: At veksle til fremmed valuta

Hvor mange Euro kan man købe for 500 kr hvis kursen er 750?

Når man skal veksle valuta er det nemmest at regne i hvad 1 koster af valutaen koster i danske kr!

1 € = 750 / 100 = 7,5 kr

Hvis 1 € koster 7,5 kr så må vi skulle finde ud af hvor mange gange 7,5 går op i 500 kr!

Valuta = 500 kr / 7,5 = 66,67 €

Eksempel: At veksle fra fremmed valuta til danske kroner

Hvor mange kroner svarer 250 svenske kroner til hvis kursen er 78?

1 sv kr = 78 / 100 = 0,78 kr

Hvis 1 sv kr svarer til 0,78 kr må vi lægge 0,78 kr sammen 250 gange!

Kroner = 250 sv kr * 0,78 = 195 kr

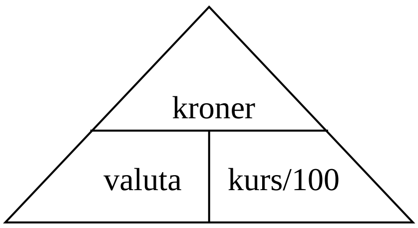
Dollar tegnet: $
Kommer af Spanish Pesos hvor S og P er lagt oveni hinanden! Ordet doller er i familie med den danske daler og kommer af Thaler!

Eksempel: At finde kursen

Hvad er kursen når man for 250 kr får 24,54 pund?

Altså er spørgsmålet hvor mange kroner der går pr pund!

$$\text{Kurs} = \frac{250}{24{,}54} = 10{,}187 \text{ kr.}$$



Dvs. 1 pund koster 10,187 kr! Da kursen altså er i 100 pund er Kursen = (100*10,187) 1018,7

Opgave 8: Løs tekst opgaverne med valuta omregning (afrund til helt antal!)

a) Hvor mange Euro € kan man købe for 1.000 kr når kursen er 750?

b) Et par sko koster 75 € i Berlin! Hvad koster skoene i danske kroner når kursen er 746,5?

c) I Danmark koster en cykel 3.750 kr. Hvad koster cyklen i Sverige når kursen er 78,65?

d) En mobil telefon koster 149,99 $ i USA. Hvad koster mobilen i kroner når kursen er 657,94?

e) Fra en tur til London er der 15,50 pund tilovers. Hvor mange kroner er de værd når kursen er 1018,7?

f) En mand vil gerne have 500 € med på rejse - hvor mange kroner skal han veksle for når kursen er 746,5 og der er et vekselgebyr på 35 kr? (gebyr = flere penge til banken!)

Opgave 9: Beregn kursen - husk regnetrekanten på forrige side - vandret streg = division!

a) 1.000 kr bliver vekslet til 1.156 norske kroner! Hvad var kursen?

b) I en kiosk i Malmø kan man betale med danske kroner! 1 dansk 10 krone svarer til 10 svenske kroner! Hvilken kurs giver kiosken?

c) En mand hæver 200 Euro i udlandet fra en bankautomat på sit VISA kort! Kursen på euro er 752 men banken lægger et vekselgebyr oveni på 35 kr! Derfor hæves der 1.539 kr! Kursen på euro'erne er derfor ikke 752. Hvad var den faktiske kurs på Euro?

Ekstra Opgave 2: Valuta spekulanter er virksomheder eller personer som spiller penge på om værdien af en valuta altså kursen stiger eller falder! Tilbage i Januar 2015 blev der spekuleret/gamlet en masse penge på, at Schweiz's ville droppe sin fastkurs politik hvor Schweizer franc var bundet til Euroen! Det skete og d.15/1-2015 steg kursen fra 619,37 til 723,21!

a) Hvis spekulanterne havde købt Schweizer franc for 1 mio kr til kurs 619,37 hvor meget kunne de så tjene på at kursen pludselig steg til 723,21?

b) Mange kommuner spekulerede i at lånte penge i Schweizer franc - hvis kursen faldt skyldte de færre kroner! Hvis en kommune har lånt 15 mio kr i Schweizer franc til en kurs 617,58 hvor meget større blev da deres gæld d.15/1-2015 hvor kursen steg til 723,21?

Facit: 20 86,5 100 133 158 420 560 769,5 987 3.768 4.768 167.654 1.520.168 2.565.579

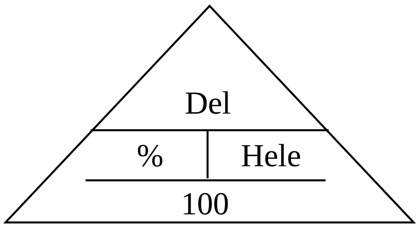
Penge & Renter:

Når man har penge stående på en konto i banken sker der det at banken låner pengene af en. Ved et lån er det normalt, at den som låner penge skal betale renter til långiveren (den der låner pengene ud). Renterne beregnes ved, at tage en procentdel eks. 2 % af det lånte beløb som betales tilbage til långiveren som tak for lånet.

Renten kan løbe over en bestemt tidsperiode. Normalt beregnes renten over et år som angives ved, at der står p.a (pro anno = per år). Dog kan renten også være givet over en måned og endda på dagsbasis. I banken beregnes der faktisk renter pr dag og renterne samles sammen og udbetales en gang om året nemlig den første januar.

Lad os tage et eksempel:

Bo har på sin opsparingskonto indbetalt 20.000 kr d. 1/1-2010.
Banken giver 2 % i rente p.a (pro anno = pr år).
Hvad står der på kontoen efter et år d.1/1-2011?



Dette er et simpelt procentregnestykke:

$$\text{Rente} = \frac{2\%}{100} * 20.000 \text{ kr} = 400 \text{ kr.}$$

Dvs. d.1/1-2011 (et år efter) indsætter banken 400 kr på kontoen så der nu står

Saldo = 20.000 kr + 400 kr = 20.400 kr. (Saldo = beløb på kontoen)

Saldo'en kunne være beregnet nemmere ved i stedet af tage 102 % fordi pengene jo stiger med 2 % ud fra de 100 % der var til at starte med.

$$\text{Saldo} = \frac{102\%}{100} * 20.000 \text{ kr} = 20.400 \text{ kr.}$$

Vi kan samle det i følgende formel.

$$\text{Ny saldo} = \frac{(100\% + rente)}{100} * \text{Gamle Saldo}$$

Opgave 10: Beregn saldoen efter et år (lommeregner tilladt)

a) Saldo = 20.000 kr, rente = 2,5 % p.a

Ny Saldo = = ________kr

b) Saldo = 45.000 kr, rente = 5,2 % p.a

Ny Saldo = = ________kr

c) Saldo = 15.000 kr, rente = 7,8 % p.a

Ny Saldo = = ________kr

d) Saldo = 120.000 kr, rente = 3,5 % p.a

Ny Saldo = = ________kr

Facit: 5.200 16.170 20.500 25.500 47.340 63.000 124.200

Renter & Opsparing:

I de fleste banker gives der ikke nogen høj rente på en helt almindelig konto – som f.eks. en lønkonto. Faktisk giver de store banker oftest slet ingen renter på lønkonto overhovedet! Hvis man vil have renter for de penge man har stående må man oprette en opsparingskonto. De findes i forskellige kategorier men oftest er der en del regler om hvor mange penge der minimum skal stå og hvor langt tid man har pengene stående på kontoen (bindingsperiode).

I eksemplet på forrige side tjener Bo 400 kr uden at røre en finger på et år. Det lyder måske ikke af så meget men hvis han nu i stedet have 200.000 kr stående ville det blive 4.000 kr i rente. (Det er nu ikke hele sandheden idet man skal betale skat af de renter man får ca. 1/3).

Rente tilskrivning over flere år:

I det næste skal vi se på hvordan penge kan stå på en konto og trække renter i mange år og langsomt blive mere værd. Lad os igen tage udgangspunkt i Bo som nu har en konto med 200.000 kr. På kontoen gives der 3 % i rente og Bo vælger at have pengene stående i 5 år. Lad os starte med at se hvor mange penge der står efter det første år?

1 år: $\frac{(100\% + 3\%)}{100}$ * 200.000 kr = 206.000 kr

Dvs. han får 6000 kr i rente efter det første år. Man kunne nu være fristet til at tro at banken så betaler 6000 kr i rente hvert år så slut beløbet bliver 230.000 kr – men det er helt forkert. Nu står der jo 206.000 kr på kontoen i det næste år så dvs. renterne det næste år må jo blive større!

2 år: $\frac{(100\% + 3\%)}{100}$ * 206.000 kr = 212.180 kr

Vi forsætter sådan indtil vi når de 5 år. Men det er imidlertid besværligt hele tiden at skulle beregne $\frac{(100\% + 3\%)}{100}$ for det giver jo 1,03 – så det bruger vi i stedet fremover.

1,03 kaldes i øvrigt **fremkrivsningsfaktoren** fordi med den kan man fremskrive resultatet.

3 år: 1,03 * 212.180 kr = 218.545,40 kr

4 år: 1,03 * 218.545,40 kr = 225101,78 kr

5 år: 1,03 * 225101,782 kr = 231854,81 kr

Dvs. Bo tjener på 5 år 31854 kr i renter for at låne pengene til banken. Måden at udregne resultatet på er en smule besværlig – for vi er jo kun interesseret i hvad der står efter 5 år og ikke årene imellem. På den næste side ser vi på en nemmere måde at få samme resultat på.

Formlen for Rentesregnings:

Hvis vi kigger på hvilke udregninger vi lavede på forrige side har vi jo egentligt blot gjort følgende:

Saldo efter 5 år = 200.000 kr * 1,03 * 1,03 * 1,03 * 1,03 * 1,03 = 231854,81 kr

Når man f.eks. ganger 2 * 2 * 2 kan det skrives med potenser 2^3. Det samme trick kan bruges på udregningen overfor for der står jo 1,03 * 1,03 * 1,03 * osv.

Saldo efter 5 år = 200.000 kr * $1{,}03^5$ = 231854,81 kr

Vi kan nu omsætte det til en generel formel:

$$\text{Slutbeløb} = \text{Startbeløb} * \left(\frac{100\% + rente}{100}\right)^{\text{år}} \qquad \frac{100\% + rente}{100} = \text{fremskrivningsfaktor}$$

Opgave 11: beregn fremskrivningsfaktoren ved at dividere med 100 og lægge en til.

a) 3 % = ______	e) 2,5 % = ______	i) 0,2 % = ______
b) 5 % = ______	f) 1,9 % = ______	j) 0,8 % = ______
c) 10 % = ______	g) 12,8 % = ______	k) 100 % = ______
d) 51 % = ______	h) 3,4 % = ______	l) 150 % = ______

Opgave 12: Beregn saldoen vha. formlen ovenfor (afrund resultatet til helt tal)

a) Rente = 5 %, beløb = 100.000, år = 6 år

Saldo = 100.000 * $1{,}05^6$ = ________

b) Rente = 6 %, beløb = 860.000, år = 10 år

Saldo = ________

c) Rente = 2,2 %, beløb = 610.000, år = 4 år

Saldo = ________

d) Rente = 1,9 %, beløb = 610.000, år = 1 år

Saldo = ________

e) Rente = 10 %, beløb = 100.000, år = 8 år

Saldo = ________

f) Rente = 4,9 %, beløb = 890.000, år = 4 år

Saldo = ________

g) Rente = 7 %, beløb = 280.000, år = 2 år

Saldo = ________

h) Rente = 1,9 %, beløb = 60.000, år = 2 år

Saldo = ________

i) Rente = 6,2 %, beløb = 80.000, år = 8 år

Saldo = ________

j) Rente = 3,5 %, beløb = 230.000, år = 3 år

Saldo = ________

Facit: 1,002 1,008 1,019 1,025 1,03 1,034 1,05 1,1 1,128 1,51 2,0 2,5
62.302 89.210 129.445 134.010 214.359 255.005 320.572 621.590 665.478 882.350
1.077.685 1.540.129 2.210.000

Renten pr måned eller dag:

På de forrige sider så vi kun på eksempler hvor renten blev beregnet over et år. I den virkelige verden kan man dog også have renter pr måned, pr dag eller time. I bankverden beregnes renten pr dag og renterne tilskrives løbende gennem året.

For at kunne rentesregning med renter pr måned eller dag er vi nød til at ændre formlen lidt. Dog er princippet det samme.

$$\text{Slutbeløb} = \text{Startbeløb} * \left(\frac{100\% + rente}{100}\right)^n$$

I formlen er år udskiftet med bogstavet **n** som står for antal **terminer** (også kaldet vækstperioder). Denne termin kan så være et år, en måned, en dag, endda et sekund om nødvendigt.

Opgave 13: Beregn saldoen vha. formlen ovenfor (afrund resultatet til helt tal)

a) Rente= 2 %, beløb= 20.000, n= 6 måneder

Saldo = = ________

b) Rente= 1 %, beløb= 5.000, n= 20 måned

Saldo = = ________

c) Rente= 0,2 %, beløb= 3.200, n= 60 dage

Saldo = = ________

d) Rente= 0,4 %, beløb= 15.200, n= 80 dage

Saldo = = ________

e) Rente= 3,5%, beløb=26.000, n= 23 måned

Saldo = = ________

f) Rente= 0,5 %, beløb= 500, n= 90 timer

Saldo = = ________

g) Rente= 2 %, beløb= 1.500, n= 48 timer

Saldo = = ________

h) Rente= 0,1 %, beløb= 400, n= 360 min

Saldo = = ________

i) Rente= 3 %, beløb= 4.500, n= 4 måned

Saldo = = ________

j) Rente= 5 %, beløb= 300, n= 15 dage

Saldo = = ________

Vær opmærksom når du låner:

I de seneste år har der været en del smarte låne firmaer som har lånt penge ud til folk hvor renten har været pr måned. Forbrugerne *læste det de troede der stod og ikke det som der stod*. På den måde troede forbrugerne at renten var pr år og ikke pr måned. Problemet i dette er at firmaerne lokkede med meget lave renter i deres reklamer – men selvom renten er lav pr måned bliver den tårnhøj hvis den omregnes til en rente pr år. F.eks. hvis renten er 1 % pr måned bliver renten pr år til 12,7 % p.a. (kan udregnes ved at sige $1{,}01^{12} - 1$). En rente på 2 % pr måned bliver til 26,8 % p.a.

Facit: 24 573 624 783 3.608 3.881 5.065 6.101 8.203 10.234 20.919 22.523 57.359

Tekststykker:

Tekststykker er svære men kan gøres nemmere ved at følge punkterne:

1. Læs teksten grundigt og understrege alle tal.
2. Find ud af hvad som ønskes beregnet og find formlen til det.
3. Kig på de understregede tal og sorter de tal fra som ikke skal bruges i formlen
4. Indsæt tallene i formlen på de rigtige pladser og find resultatet (husk regnehierarkiet)

Opgave 14: Løs tekststykkerne om rentesregning (afrund resultatet til helt tal)

a) Kasper's forældre har oprettet en børneopsparing med 3,5 % i rente p.a. Da han blev født indsatte de 3.000 kr og glemte efterfølgende alt om kontoen. Da Kasper fylder 18 år opdager hans mor kontoen og Kasper får den som en ekstra fødselsdagsgave. Hvor mange står der på Kaspers børneopsparing da han blev 18 år?

b) Connie låner 20.000 kr af noget der hedder sms-lån. Renten er 1,5 % pr måned. Efter 12 måneder skal hun tilbagebetale pengene med renter. Hvad skal hun betale tilbage?

c) Tobias skal på ferie men har ikke råd. Det har til gengæld hans chef som er gået med til at låne ham 10.500 kr. At låne er jo ikke gratis så derfor aftaler de at Tobias skal betale 0,2 % i rente pr dag. Han betaler pengene tilbage 62 dage efter han har lånt dem. Hvad skal han betale tilbage?

d) Klaus opretter en opsparingskonto hvor han indsætter 55.000 kr til en rente på 3,4 ‰ pr måned. Efter et halvt år hæver han alle pengene fra kontoen for at købe en antik motorcykel fra 1938. Hvor mange renter skal han regne med at få udbetalt i slutningen af året? (NB: husk at det er promille og ikke procent)

Inflation:

Hvert år stiger priserne på mad, benzin, huse og meget andet. Prisstigningerne er meget små fra år til år men over en længere periode bliver det til en stor prisforskel. Mange har måske hørt ældre mennesker kunne berette om deres barndom i 50'erne hvor et Wienerbrød kostede kun 16 øre (altså dem med creme – dem med syltetøj kostede 25 øre). I dag koster et wienerbrød henved 10 kr – hvor man i 50'erne kunne få 40 wienerbrød for den pris. Når tingene stiger i samfundet taler man om *at pengene bliver mindre værd hvilket man kalder for inflation*.

Facit: 1.132 2.566 5.572 8.146 11.885 15.672 23.912 26.711

Inflation er rentesregning:

Inflation regnes i procent og fungere på samme måde som rentesregning. Derfor kan man benytte den samme formel fra forrige side til at beregne inflationen i landet. I Danmark har der gennemsnitligt fra 1981 til 2010 været en inflation på 3,39 % pr år. Dvs. at ens penge gennemsnitligt er blevet 3,39 % mindre værd hvert år. Sagt på en anden måde er 10.000 kr i 2009 ikke det samme værd i 2010. Hvis man vil have 10.000 kr i 2009 penge i 2010 skal man have

$$2010 \text{ pris} = 10.000 * \left(\frac{100\% + 3{,}39\%}{100}\right)^{1 \text{ år}} = 10.000 * 1{,}0339 = \underline{\underline{10.339 \text{ kr}}}.$$

Dvs. hvis man går ind i et supermarkedet i 2009 og køber for 10.000 kr's mad så kan man ikke få den samme mængde mad i 2010 for de samme penge. Hvis man vil have den samme mængde mad i 2010 skal man betale 10.339 kr.

Opgave 15: Løs tekstopgave stykkerne om inflation (afrund resultatet til helt tal)

a) I 2010 havde familien Jensen et mad budget på 4.000 kr om måneden. Hvor mange penge skal familien have i mad budget i 2011 hvis inflationen var på 2,7 % det år?

b) Familien Jensen ønsker at finde ud af hvad deres mad budget vil være i 2020. De sætter den årlige inflation til 3 % pr år. Hvad er deres mad budget på i 2020 hvis den i 2010 er på 4.000 kr?

c) I 2004 fik familien Algebra renoveret deres WC for den nette sum af 150.000 kr. Hvad ville det samme badeværelse koste at bygge i 2010 hvis inflationen var på 3 % pr år.

d) I 1998 kostede det 21,4 mia kr at bygge Storebæltsbroen. Hvad ville det koste i 2010 at bygge broen hvis inflationen gennemsnitlig var på 3,4 % fra 1998 til 2010? (afrund resultatet til helt antal mia. kr)

Hyperinflation:

Inflation i et samfund kan ikke undgås men en for høj inflation er ikke godt for økonomien. Når inflationen bliver ekstrem høj f.eks. 50 % pr måned snakker man om hyperinflation. Hyperinflation kan opstå hvis f.eks. en stat begynder at trykke flere pengesedler for at betale sin gæld. Pengesedler vil hurtigt så miste deres værdi fordi der er flere af dem. Hyperinflation er bl.a. set efter første verdenskrig i Tyskland hvor inflationen nåede 3.250.000 %. Det bevirkede at prisen på f.eks. brød blev fordoblet hver 49 time samt at folk begyndte at tapetsere vægge med million sedler.

Facit: 32 122 506 2.312 4.108 5.376 23.400 179.108 231.200

Procentvis vækst:

I det foregående har vi udelukkende set på penge der vokser på den ene eller anden måde. Men der er også andre ting som oplever vækst og hvor man kan bruge nøjagtig samme formel. Eksempler på det kunne være antal musik numre i verden, Internettets udbredelse, verdensbefolkningen osv. Inden vi begynder at beregne på andet end penge skal vi lige have lavet formlen om så den omhandler andre ting end penge:

$$\text{Slutværdi} = \text{Startværdi} * \left(\frac{100\% + vækst\%}{100}\right)^{n} \qquad \frac{100\% + vækst\%}{100} = \text{fremskrivningsfaktor}$$

Opgave 16: Løs tekstopgave stykkerne om vækst (afrund resultatet til helt tal)

a) I 1980 var der 1.038 mio indbyggere i Kina. Gennem 80'erne steg Kinas befolkning med 1,5 % pr år. Hvor mange indbyggere var der i 1990?

b) Hvor mange indbyggere ville der have været i Kina i 2010 hvis befolkningen havde forsat med at vokse med 1,5 % pr år. (I dag er der ca. 1,6 mia mennesker)

c) Et grantræs vækst vokser i dens første leveår med 20 % hvert år. Hvor højt vil et grantræ være der er 45 cm – 8 år efter?

d) I 1993 i Indien var der i 884 mio mennesker. Den årlige vækst i befolkningen har været på 2 % siden. Hvor mange mennesker kan man forvente at der er i 2013?

Ekstra Opgave 3: Løs tekstopgaverne

a) I foråret stiger vandgennemstrømningen i en flod med 10 % hver dag. I starten af foråret er gennemstrømningen på 1.002.000 liter vand pr min. Hvad er vandgennemstrømningen steget til 35 dage efter? (afrund til helt antal millioner liter vand)

b) Antallet af mb på en harddisk stiger med 30 % hvert år. I 1997 var en 250 mb harddisk standard. Hvor meget burde standarden være i 2010?

Facit: 28 55 193 632 1.205 1.314 1.500 1.622 2.532 7.572 8.320

Negativ Procentvis Vækst:

Ligesom man kan have vækst kan man selvfølgelig også opleve det modsatte altså et fald. Formlen for det er næsten den samme blot med et minus.

$$\text{Slutværdi} = \text{Startværdi} * \left(\frac{100\% - \textit{vækst}\%}{100}\right)^n \text{ hvor } \frac{100\% - \textit{vækst}\%}{100} = \text{tilbageskrivningsfaktor}$$

Opgave 17: Løs tekstopgave stykkerne om negativ procentvis vækst (afrund resultatet til helt tal)

a) En kvindes knoglemasse falder med 1 % hvert år fra det fyldte 30 år. Som 30 årig har hun 35 kg knogler. Hvor meget knoglemasse har hun tilbage når hun fylder 65 år?

b) I 1995 blev der født ca. 70.000 børn. Dengang regnede man med et fald på 1,5 % indtil 2010. Hvor mange børn skulle i følge denne prognose blive født i 2010? (afrund til helt antal 1000)

c) En medicin nedbrydes med 50 % pr dag kaldes også halveringstid). En patient får 4 mg af medicinen. Hvor meget af medicinen er tilbage efter 5 dage?

d) Koffein er et opkvikkende middel som findes i kaffe og cola. I en almindelig kop kaffe findes 100 mg koffein (I te er der 45 mg!). Når koffeinet er optaget i kroppen har den en halveringstid på ca. 4 timer. Dvs. efter 4 timer er der kun halvdelen altså 50 % tilbage af koffein'et. Hvis man har mere end 150 mg koffein i kroppen kan man have svært ved at sove ordentligt. Hvor meget koffein er der tilbage i kroppen af en kop kaffe 12 timer efter den er drukket?

Vækstformlen fra formelsamlingen:

Den formel vi har brugt til at beregne vækst ser lidt anderledes ud end den du vil kunne finde i din formelsamling. Den tilsvarende vækstformel i din formelsamling ser ud som følger:

$$K_n = K * (1+x)^n \qquad \text{hvor } x = p / 100$$

K = starværdi, n = terminer/vækstperioder, p = vækst% el. Rente, Kn = slutværdi

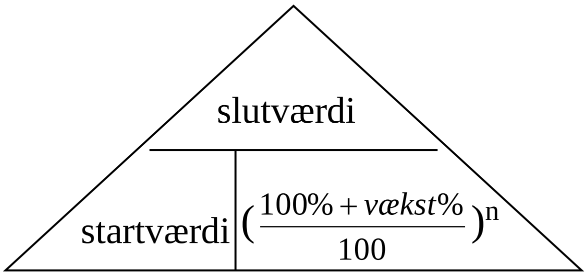
Hvis man ser nøje efter er de to formler ens. Dog vil nogen sige at formlen fra formelsamlingen er en smule mere uforståelig. Hvis du synes det kan du skrive den formel vi har brugt op i din formelsamling (matematikhåndbogen!) så du har den til eksamen engang!

Facit: 0,125 9,8 12,5 25 80 255 14.560 55.800 102.000

Beregning af startværdien:

Indtil nu ha vi kigget på hvordan man kan beregne slutværdien efter en vækst periode. Men man kan også have den omvendte situation – altså hvor man kender slutværdien men skal finde startværdien. Til højre er vækstformlen smidt ind i en regnetrekant – og ud fra den ses det at startværdien må kunne beregnes på følgende måde.

$$\text{Startværdi} = \text{slutværdi} : \left(\frac{100\% + \mathit{vækst}\%}{100}\right)^{n}$$



Opgave 18: Beregn startværdien ud fra slutværdien og vækst% (afrund til helt tal)

a) Vækst= 5 %, slutværdi = 30.000, n = 4

startværdi = 30.000 : $1{,}05^4$ = ________

b) Vækst= 9 %, slutværdi = 250.000, n = 8

startværdi = = ________

c) Vækst= 32 %, slutværdi = 23.000, n = 3

startværdi = = ________

d) Vækst= 0,6 %, slutværdi = 12.000, n = 15

startværdi = = ________

e) Vækst= 78 %, slutværdi = 500.000, n = 12

startværdi = = ________

f) Vækst= 13,7 %, slutværdi= 70.000, n = 20

startværdi = = ________

g) Vækst= 0,7 %, slutværdi= 200.000, n = 50

startværdi = = ________

h) Vækst= 50 %, slutværdi= 1.000.000, n = 3

startværdi = = ________

Opgave 19: Løs tekststykkerne hvor startværdien skal beregnes.

a) Karen har i 5 år haft en obligations-opsparingskonto hvor der har stået en masse penge og trukket renter. I de 5 år har hun fået 3 % i rente og saldoen er nu 245.233 kr. Hvor mange penge satte hun ind på kontoen til at starte med?

b) Et land har 45 mio indbyggere. Befolkningen har de sidste 10 år steget med 2 % hvert år p.g.a indvandring. Hvor mange indbyggere var der i landet for 10 år siden? (svar i mio indbygger)

c) I 2011 var benzinprisen for 1 liter benzin på 12 kr. Hvad kostede 1 liter benzin i 2006 hvis inflationen gennemsnitlig har været på 3,4 % pr år? (beregn resultatet inklusiv 2011 og 2006)

Facit: 9,8 36,9 88,2 494 5.369 10.000 10.970 24.681 125.467 141.110 211.540 296.296

Fra fremskrivningsfaktor til vækst%:

I det næste får vi brug for at lave fremskrivningsfaktoren eks 1,03 om til vækst%. Det gøres nemmest ved at trække 1 fra fremskrivningsfaktoren og ganger med 100.

Eks: 1,05 – 1 = 0,05 * 100 = 5 %

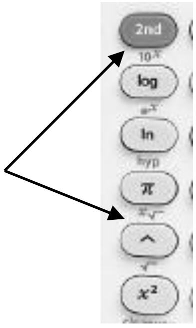
Opgave 20: Omskriv fremskrivningsfaktoren til vækst%

a) 1,04 = ______%	e) 1,1 = ______%	i) 1,052 = ______%
b) 1,08 = ______%	f) 1,66 = ______%	j) 1,009 = ______%
c) 1,02 = ______%	g) 1,13 = ______%	k) 2,0 = ______%
d) 1,07 = ______%	h) 1,015 = ______%	l) 2,64 = ______%

Kvadratrødder, Kubikrødder og n'te rødder:

I det følgende får vi brug at kunne indtaste forskellige kvadratrødder ind på lommeregneren. Når man løser ligninger er kvadratroden det modsatte af 2 potens (x^2)og det modsatte af 3 potens (x^3) er kubikroden (også kaldt den 3 rod):

$x^2 = 4$	$x^3 = 27$	$x^4 = 256$
$x = \sqrt{4}$	$x = \sqrt[3]{27}$	$x = \sqrt[4]{256}$
$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$



Nu skal vi finde ud af hvordan man taster disse specielle kvadratrødder ind på lommeregneren. Til højre er nogle knapper vist fra TI30 med pile der viser hvilke knapper som skal benyttes. For f.eks. at tage den 4 rod af 256 altså $\sqrt[4]{256}$ på lommeregneren tastes følgende:

4 2nd ^ 256 så skriver lommeregneren følgende $4\sqrt[x]{}\ 256$ hvilket gerne skulle give 4.

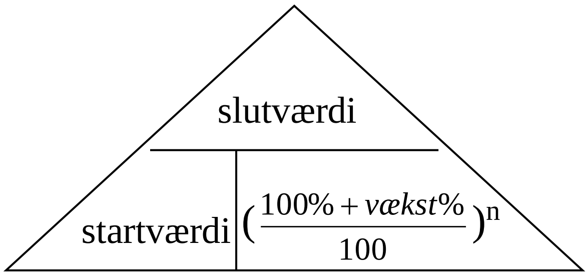
Opgave 21: Bestem rødderne

a) $\sqrt[4]{81}$ = ______	e) $\sqrt[7]{78125}$ = ______
b) $\sqrt[3]{729}$ = ______	f) $\sqrt[3]{12167}$ = ______
c) $\sqrt[4]{1296}$ = ______	g) $\sqrt[3]{4096}$ = ______
d) $\sqrt[3]{3375}$ = ______	h) $\sqrt[7]{823543}$ = ______

Ekstra Opgave 4: løs ligningen $2x^2 + 4 = 36$

Facit: 0,9 1,2 1,5 2 3 3 4 4 5 5,2 6 7 7 8 9 10 13 15 16 23 32 66 99 100 145 164

Beregning af vækst%:



På forrige side har vi lært det som nu skal bruges til at beregne vækstprocenten. Hvis vi kigger på regnetrekanten ses det at.

$$\left(\frac{100\% + vækst\%}{100}\right)^n = \frac{slutværdi}{startværdi}$$

Det er jo desværre ikke vækst% men tæt på. Vi mangler blot at få fjernet potensen n. Vi flytter derfor n over på den anden side – men her bliver potensen n til det modsatte nemlig den n'te rod:

$$\frac{100\% + vækst\%}{100} = \sqrt[n]{\left(\frac{slutværdi}{startværdi}\right)}$$

Dvs. sige at vi nu kan beregne fremskrivningsfaktoren.

$$\text{Fremskrivningsfaktor} = \sqrt[n]{\left(\frac{slutværdi}{startværdi}\right)}$$

På forrige side lærte vi at omsætte fremskrivningsfaktoren til vækstprocent. Vi tager et eksempel.

Slutværdi = 3.500 startværdi = 2.200 n = 8

$$\text{Fremskrivningsfaktor} = \sqrt[8]{\left(\frac{3500}{2200}\right)} = 1{,}0597 \approx 1{,}06$$

Vækst% = 1,06 – 1 = 0,06 * 100 = 6 %

Opgave 22: Beregn vækst%. Husk at bruge parenteser! (Afrund til 1 decimal)

a) Slut = 5.000, start = 4.500, n = 6

Vækst% = ≈ ____%

b) Slut = 12.000, start = 8.000, n = 15

Vækst% = ≈ ____%

c) Slut = 12, start = 8, n = 10

Vækst% = ≈ ____%

d) Slut = 50.000, start = 20.000, n = 30

Vækst% = ≈ ____%

e) Slut = 50.000, start = 20.000, n = 16

Vækst% = ≈ ____%

f) Slut = 2.300, start = 500, n = 7

Vækst% = ≈ ____%

g) Slut = 15, start = 3, n = 100

Vækst% = ≈ ____%

h) Slut = 62.000, start = 60.000, n = 5

Vækst% = ≈ ____%

i) Slut = 500, start = 6, n = 10

Vækst% = ≈ ____%

j) Slut = 500, start = 6, n = 6

Vækst% = ≈ ____%

Facit: 0,3 0,7 1,6 1,8 2,7 3,1 4,1 5,9 7,8 10,5 24,4 45,6 55,6 80,2 109,0

Opgave 23: Find vækst% i tekststykkerne. (afrund til 1 decimal)

a) Bertram har oprettet en opsparingskonto hvor han satte 50.000 kr ind. 4 år efter er saldoen 56.233 kr. Med hvilken vækst% er pengene vokset på kontoen pr år? Eller sagt på en anden måde hvilken rente har der været på kontoen pr år.

b) Lilly har en konto hvor der ved oprettelsen blev sat 3.000 kr ind. Siden har hun glemt alt om den og kontoen har fået lov at stå og trække renter. 20 år efter opdager hun kontoen hvor der nu står 6.012 kr. Hvad har været den gennemsnitlige årlige rente på kontoen i de 20 år?

c) Konrads gavmilde farmor giver sit nyfødte barnebarn 100.000 kr. Pengene bliver sat ind på en opsparingskonto med krav om at pengene først må hæves når konrad fylder 18 år. Farmor vil gerne have at der på kontoen står 150.000. Hvilken rente skal kontoen have pr år hvis dette skal lykkes?

d) I 1950 kostede et wienerbrød 25 øre. I 2010 kostede det 10 kr. Hvad har været den gennemsnitlige inflation pr år? (husk øre til kr)

Ekstra Opgave 5: Løs tekststykkerne

a) I 1975 kostede 1 liter benzin 2,1 kr. I 2005 kostede den 8,9 kr.
   - Hvad har været den gennemsnitlige vækst af benzinpriserne i perioden?
   - Hvad vil benzinprisen være i 2035 hvis denne vækst forsætter?

b) En andelslejlighed kostede i 1998 20.000 kr. I 2008 kostede den samme lejlighed 620.000 kr. Hvad er den gennemsnitlige vækst i lejlighedens værdi pr år?

c) En dreng vokser på 3 år fra 150 til 185 cm. Hvad var hans årlige vækstprocent?

d) En skoles papirforbrug steg fra 300.000 ark til 2.500.000 ark på 12 år.
   - Med hvilken vækst% steg forbruget pr år?
   - Hvis de forsætter med væksten. Hvilket forbrug har de så om 8 år?

Facit: 0,8 2,3 3,0 3,5 4,9 6,3 7,2 7,6 12,6 19,3 37,4 41 83,2 22.000 10.258.020 12.003.564

Samlet vækstprocent:

Vi skal nu se på hvordan man kan finde den samlede vækstprocent over f.eks. 3 år hvis man kender vækstprocenterne for hvert af de 3 år. Dvs. at vi ikke kender nogen startværdi eller slutværdi men blot har oplyst hvad væksten har været i de 3 år. Lad os tage et eksempel:

1 år: 2 % = 1,02 (fremskrivningsfaktoren)

2 år: 4 % = 1,04

3 år: 2 % = 1,02

For at beregne den samlede vækst ganger man de 3 fremskrivningsfaktorer med hinanden:

Samlet vækst = 1,02 * 1,04 * 1,02 = 1,082 = 8,2 %

Først får vi den samlede fremskrivningsfaktor, som hurtigt laves om til % (se tidligere opgave)

Vi kan samle det til en større formel:

Samlet vækst = fremskrivningsfaktor1 * fremskrivningsfaktor2 * .... * fremskrivningfaktor n

$$\text{Samlet vækst} = \frac{100\% + vækst\%\_1}{100} * \frac{100\% + vækst\%\_2}{100} * \ldots\ldots * \frac{100\% + vækst\%\_n}{100}$$

Opgave 24: Find den samlede vækstprocent (afrund til 1 decimal)

a) Vækstprocenter = 2 %, 3 %, 5 %

Samlet % = 1,02 * 1,03 * 1,05 ≈ ____%

b) Vækstprocenter = 3 %, 2 %

Samlet % = ≈ ____%

c) Vækstprocenter = 4 %, 2 %, 6 %, 3 %

Samlet % = ≈ ____%

d) Vækstprocenter = 1 %, 2 %, 1 %

Samlet % = ≈ ____%

e) Vækstprocenter = 6 %, 6 %, 6 %, 6 %

Samlet % = ≈ ____%

f) Vækstprocenter = 1 %, 1 %, 1 %, 3%

Samlet % = ≈ ____%

g) Vækstprocenter = 2 %, 1,5 %, 2 %

Samlet % = ≈ ____%

h) Vækstprocenter = 0,5 %, 0,2 %, 1,1 %

Samlet % = ≈ ____%

Opgave 25: Beregn den samlede vækstprocent i tekststykkerne. (afrund til 1 decimal)

a) En virksomhed oplever i 1995 en vækst på 2 %, Året efter i 1996 er den på 1 % og i 1997 på hele 6 %. Hvad er den samlede vækstprocent i de 3 år?

b) En pige vokser i sit 9 leve år med en vækst på 5 %. Året efter i sit 10 leve år vokser hun med 15% og i sit 11 leveår med hele 35 %. Hvad har været pigens samlede vækst i de 3 år?

Facit: 1,8 3,2 4,1 5,1 5,6 6,1 7,8 9,2 10,3 15,8 26,2 52,1 63,0 83,2

Gennemsnitlig procentvise vækst:

I det følgende skal vi se på hvordan man kan finde ud af hvad den gennemsnitlige procentvise vækst pr måned har været set over et år. For at kunne dette er man nød til at kende hvad væksten har været samlet over året og derefter finde ud af hvad væksten har været pr måned.

Hvis f.eks. væksten har været på 12 % vil mange måske være tilbøjelig til at mene at væksten pr måned må være 1 % (12 % / 12 måneder). Dog lærte vi på forrige side hvordan man beregner den samlede vækst så lad os se om det kan passe:

Samlet vækst = 1,01 * 1,01 * ..... * 1,01 = $1{,}01^{12}$ = 1,1268 = 12,7 %

Den er næsten 12 % men ikke nøjagtig. For at finde den gennemsnitlige vækst skal vi have fat i kvadratroden igen. Vi skal finde et tal som ganget med sig selv 12 gange giver 1,12. Til dette har vi brug for den 12 rod af tallet:

Gennemsnit = $\sqrt[12]{1{,}12}$ = 1,009488 = 0,95 % (Dvs. at den gennemsnitlige vækst er på 0,95 %.)

Ovenstående beregninger gælder kun for et år, og ikke for andre typer af opgaver. I det følgende samles udregningerne til en formel som kan benyttes til alle typer af opgaver.

$$\text{Gnm Vækst\%} = \sqrt[n]{fremskrivningsfaktor} = \sqrt[n]{\left(\frac{100\% + vækst\%}{100}\right)}$$

n = antal terminer (f.eks. måneder, dage, år osv.)

Opgave 26: Beregn den gennemsnitlige procentvise vækst. (afrund til 1 decimal)

a) vækst% = 20 %, n = 12

Gnm Vækst% = $\sqrt[12]{1{,}2}$ ≈ ____ %

b) vækst% = 6 %, n = 5

Gnm Vækst% = ≈ ____ %

c) vækst% = 9 %, n = 3

Gnm Vækst% = ≈ ____ %

d) vækst% = 35 %, n = 6

Gnm Vækst% = ≈ ____ %

e) vækst% = 50, n = 4

Gnm Vækst% = ≈ ____ %

f) vækst% = 89, n = 12

Gnm Vækst% = ≈ ____ %

g) vækst% = 0,6 %, n = 3

Gnm Vækst% = ≈ ____ %

h) vækst% = 5,9 %, n = 3

Gnm Vækst% = ≈ ____ %

Facit: 0,2 0,8 1,2 1,5 1,9 2,9 3,2 5,1 5,4 10,7 12,8 13,5

Opgave 27: Beregn den gennemsnitlige procentvise vækst i tekststykkerne (afrund til 2 dec)

a) En virksomhed har oplevet en samlet vækst på 13 % gennem det sidste år. Hvor meget var den gennemsnitlige procentvise vækst pr måned? (husk 12 måneder på et år)

b) En bank giver 3,5 % i rente p.a.

- Hvad er renten pr måned?

- Hvad er renten pr dag? (renteår = 360 dage)

c) På 8 dage vokser en bakterie kultur med 250 %. Hvilken gennemsnitlige vækst har bakteriekulturen haft på 1 dag? (husk 250 % i vækst er 350 % som fremskrivning)

d) På et år har der været en vækst i indbrud på 4,5 %. Hvad var den gennemsnitlige vækst pr måned?

Samlet & Gennemsnitligt Vækst i kombination:

I nogle tilfælde har man de enkelte vækst procenter fra terminerne (årene) og ønsker at finde den gennemsnitlige vækst. Her må man først beregne den samlede vækstprocent. Herefter kan man finde den gennemsnitlige vækstprocent!

Opgave 28: Beregn den gennemsnitlige procentvise vækst i tekststykkerne (afrund til 2 dec)

a) En virksomhed har haft en vækst på 3% i 2000, på 6 % i 2001 og 9 % i 2002. Hvad var den gennemsnitlige procentvise vækst i de 3 år?

b) En familie har et lån i banken. I år 2010 var renten 1,5 %, året efter 1,3 % og steg så i 2012 til 3,5 %. Hvad har været den gennemsnitlige rente i de 3 år?

c) I en klasse var der i løbet af en ugen følgende fravær: 10%, 20%, 0%, 10%, 5%. Beregn den gennemsnitlige fraværsprocent i løbet af ugen?

d) Et gymnasium har i de 4 måneder oplevet et frafald på henholdsvis 5 %, 2%, 1% og 8 %. Hvad var det gennemsnitlige frafald på gymnasiet pr måned?

Facit: 0,01 0,29 0,37 1,02 2,10 2,81 3,96 4,52 5,97 8,80 12,98 16,95 20,35

Hvordan man finder n (siden man <u>ikke behøver at lave</u>!!!!!!!!!!!!)**:**

Vi har i dette forløb beregnet slutværdi, startværdi og vækst% - men på intet tidspunkt har vi beregnet n i formlen (altså terminerne). Grunden er at det er svært og at det kræver kendskab til logaritme funktionen log på din lommeregner.

Lad os prøve at isolere n i vækst ligningen:

$$\text{Slutværdi} = \text{Startværdi} * (\text{fremskrivningsfaktor})^n$$

$$(\text{fremskrivningsfaktor})^n = \frac{\textit{slutværdi}}{\textit{startværdi}}$$

Og her kan vi så ikke komme længere med mindre man kender log funktionen. Den siger nemlig at:

$\log 2^x = x * \log 2$ (det kaldes også at eksponenten i potensen logges ned)

Vi kan bruge dette i ligningen blot vi tager log funktionen på begge sider af ligmed tegnet:

$$n * \log \text{fremskrivningsfaktor} = \log\left(\frac{\textit{slutværdi}}{\textit{startværdi}}\right)$$

Inden vi forsætter skal vi gøre højre side lidt pænere. Det gælder nemlig at:

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log(1) - \log(2)$$

$$n * \log \text{fremskrivningsfaktor} = \log(\text{slutværdi}) - \log(\text{startværdi})$$

Så kan vi isolere n.

$$n = \frac{(\log(\textit{slutværdi}) - \log(\textit{startværdi}))}{\log(\textit{fremskrivningsfaktor})}$$

Ekstra Opgave 6: Når tallene tastes ind er det vigtigt at huske parenteserne! (afrund til 1 decimal)

a) Hvor mange år skal der gå hvis prisen på benzin skal stige fra 12 kr til 14 kr hvis væksten i prisen er på 5 % pr år?

b) Hvor mange år er der gået hvis prisen på et wienerbrød engang var 5 kr og nu er på 10 kr dersom inflationen er på 4 %.

c) Bo sætter 250.000 kr ind på en opsparingskonto. På kontoen er der 3,5 % rente p.a. Hvor mange år går der før end renterne har gjort at der står 300.000 kr på kontoen?

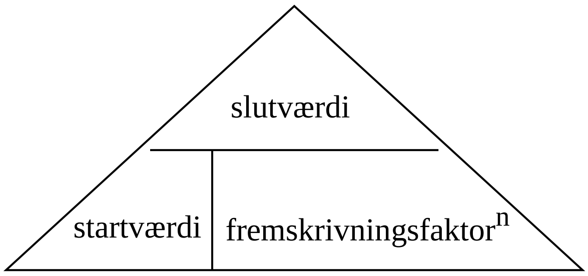
d) Et træ er 2 m højt. Det har en vækst% på 10 % pr år. Hvor mange år går der førend træet er 8 m højt?

Facit: 1,6 3,2 5,3 8,2 14,5 17,7 18,2

Repetition:

I det følgende er samlet de formler vi har brugt lettere omskrevet.

- **Fremskrivningsfaktor =** $\frac{100\% + vækst\%}{100}$; **Tilbageskrivningsfaktor** = $\frac{100\% - vækst\%}{100}$
- Slutværdi = Startværdi * $(\text{fremskrivningsfaktor})^{n}$
- Startværdi = $\frac{slutværdi}{fremskrivningsfaktor^{n}}$
- Fremskrivningsfaktor = $\sqrt[n]{\left(\frac{slutværdi}{startværdi}\right)}$



- Samlet Vækst% =(fremskrivningsfaktor1 * fremskrivning.2 * .. * fremskrivning.n – 1) * 100
- Gnm Vækst%= ($\sqrt[n]{fremskrivningsfaktor}$ - 1) * 100

I det følgende skal bruge alle formler ovenfor. Først ses på hvad som ønskes beregnet!. Herefter findes formlen som kan beregne det. Værdierne sættes ind i formlen og resultatet beregnes.

Opgave 29: Find den rigtige formel, indsæt tallene og beregn resultatet. (afrund 1 decimal)

a) Vækst= 6 %, startværdi = 20.000, n = 5

slutværdi = = ________

b) Vækst= 10 %, slutværdi = 50.000, n = 7

startværdi = = ________

c) startværdi= 1556, slutværdi = 3.000, n = 3

Vækst% = = ________

d) Vækst= 1,3 %, slutværdi = 80.000, n = 12

startværdi = = ________

e) Vækst= 5,8 %, startværdi = 60.000, n = 10

slutværdi = = ________

f) startværdi= 15, slutværdi= 18, n = 4

Vækst% = = ________

g) Vækst%= 15%, 18%,12%

Samlet vækst = = ________

h) Vækst= 52 %, startværdi= 100.000, n = 5

slutværdi = = ________

i) Samlet Vækst%= 20, n = 13

Gnm Vækst = = ________

j) Startværdi= 130, slutværdi= 200, n = 19

Vækst % = = ________

k) Vækst%= 2 %, 1,5 %, 0,8%, 5%

Samlet vækst% = = ________

l) Vækst%= 0,5%, startværdi= 200, n = 100

Slutværdi = = ________

Facit: 1,4 2,3 3,3 4,7 9,6 24,5 52,0 329,3 1.024,5 9.006,2 25.657,9 26.764,5 68.513,6 105.440,6 811.368,1 900.325,5

Opsparing (annuitets-opsparing):

Når man sparer op vil man som regel sætte et beløb ind hver måned eller år på en opsparingskonto med en god rente. Nedenfor ses en formel til at beregne det der står på opsparingskontoen til sidst:

$$Slutværdi = Ydelse * \frac{((1+P\%)^{n} - 1)}{P\%} \qquad \text{Hvor P\%} = \frac{renten}{100}$$

- Renten: Den rente banken betaler per termin (som regel per år - p.a
- Ydelsen (Y): Er det beløb som man sætter ind på opsparingskontoen hver termin.
- Termin (n): Er renteperioden som kan være en hvilken som helst tidsperiode oftest år!
- Slutværdi: Det beløb der står på opsparingskontoen efter det givne antal terminer.

Eksempel: En mand sætter 20.000 kr ind på en opsparingskonto hvert år med en rente på 3,5 %.

$$Slutværdi = 20.000 * \frac{((1+0,035)^{5} - 1)}{0,035} = 107.249 \text{ kr}$$

Fortjeneste/Renten = 107.249 kr - (5 år * 20.000) = 7.249 kr

Han tjener 7.249 kr i rente men skal selvfølgelig betale skat af denne rente da det er en indtægt!!

Opgave 30: Beregn hvad der står på opsparingskontoen (afrund til et helt tal).

a) **Ydelse:** 20.000 kr **r:** 2 % **n:** 10 år

$$\text{Slut} = 20.000 * \frac{(1,02^{10} - 1)}{0,02} = \_\_\_\_\_\_$$

b) **Ydelse:** 60.000 kr **r:** 5 % **n:** 4 år

Slut = = ______

c) **Ydelse:** 4.000 kr **r:** 2,5 % **n:** 20 år

Slut = = ______

d) **Ydelse:** 200 kr **r:** 3,5 % **n:** 40 år

Slut = = ______

Opgave 31: Løs tekst opgaverne med opsparing

a) Nyfødte Herman har fået oprettet en børneopsparing med 2,3 % p.a. hvor hans forældre vil sætte 2000 kr ind hvert år. Når han fylder 14 år kan han hæve børneopsparingen! Hvad står der på den

b) En anden bank tilbyder en rente på 3,5 % på børneopsparingen! Hvor meget mere kan Herman tjene hvis pengene sættes ind på denne konto?

Facit: 2.757 15.128 16.910 32.597 102.179 170.218 218.994 258.608 312.284

Lån (Annuitetslån)

Når man låner penge skal de selvfølgelig betales tilbage + renter i mindre dele (ydelser)!

Annuitetsformel bruges til at beregne den ydelse man vil have på et givent lån med en bestemt rente

$$Ydelse = Hovedstol * \frac{P\%}{1-(1+P\%)^{-n}} \qquad \text{Hvor P\%} = \frac{renten}{100}$$

- Renten: Den procentdel man skal betale for at få lov til at låne pengene.
- Hovedstol: Er et andet ord for det beløb man låner.
- Termin (n): Er renteperioden som kan være år, måneder, dage endda minutter!
- Ydelse: Er de penge man skal betale tilbage hver termin - f.eks. hvert år!

Et eksempel: Peter optager et fastforrentet lån på 2.000.000 kr til en rente på 5 % i 30 år.

$$\text{P\%} = \frac{5}{100} = 0{,}05 \qquad Ydelse = 2.000.000 * \frac{0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-30}} = 130.103 \text{ kr}$$

130.103 kr pr år lyder måske voldsomt men det er jo ydelsen pr år og pr måned må det så blive:

Ydelse pr måned = 130.103 / 12 = 10.842 kr

Opgave 32: Beregn ydelsen pr måned i de fastforrentede lån. (afrund til helt tal)

a) **Beløb:** 300.000 kr **r:** 3 % **n:** 30 år

$$\text{Ydelse} = 300.000 * \frac{0{,}03}{(1-1{,}03^{-30})} = \underline{\underline{\qquad}}$$

Ydelse pr måned = = ________

b) **Beløb:** 2.500.000 kr **r:** 6 % **n:** 20 år

Ydelse = = ________

Ydelse pr måned = = ________

c) **Beløb:** 500.000 kr **r:** 8 % **n:** 10 år

Ydelse = = ________

Ydelse pr måned = = ________

d) **Beløb:** 4.500.000 kr **r:** 1,5 % **n:** 30 år

Ydelse = = ________

Ydelse pr måned = = ________

Ekstra Opgave7: Arkibald & kone skal låne 2,8 mio kr og har været i 2 banker for at få tilbud:

- **Tilbud 1:** 3,5 % i rente p.a. med en løbe tid på 20 år.
- **Tilbud 2:** 2,8 % i rente p.a. med en løbe tid på 30 år.

Vurder hvilket lån der bedst kan betale sig? - hvor meget mere betaler man tilbage end 2,8 mio?

Facit: 1.275 5.218 6.210 15.306 15.615 18.163 32.841 74.515 187.376 202.168 217.961 1.140.220 1.375.569

Opgave 33: Bestem hvad skal findes, vælg formel og indsæt.

a) Hans har sat 250.000 kr ind på en opsparingskonto. Efter at have slået i bordet har han fået 2,5 % p.a i rente under forudsætning af at han binder pengene på kontoen i 5 år. Dvs. at han ikke kan hæve pengene før efter 5 år.

- Hvor meget er saldoen på kontoen efter 5 år?

- Hvor mange penge har han tjent i renter de 5 år?

b) I et land er der 5.500.000 indbyggere. I de sidste 10 år er landets befolkning vokset med 2 % pr år. Hvor mange indbyggere var der i landet for 10 år siden?

c) Hvis inflationen er 12 % hvad er 5.000 kr værd om 8 år?

d) I de sidste år er bestanden af kronhjorte i dyrehaven vokset med 4 % om året. Hvor stor vil bestanden være om 20 år hvis der på nuværende tidspunkt er 580 kronhjorte?

Ekstra Opgave 8: Løs tekst stykkerne

b) Gennem 7 år har Jon sparet op så hans formue nu er vokset med 23 %. Med hvor mange procent er hans formue vokset hvert af de 7 år?

c) Gennem 6 år er befolkningen i langbortistand vokset fra 1,3 mio til 1,7 mio mennesker. Med hvor mange procent er befolkningen vokset med hvert af de 6 år?

d) Hvilken rente har Jens fået når han 2 på år har forøget sin opsparing fra 20.000 til 23.105 kr?

e) På et sygehus har dødeligheden i de sidste 5 måneder været: 0,6%, 0,5%, 1,1%, 0,1% og 2,0%. Hvad er den samlede dødelighed i procent?

f) En hus koster 5.100.000 mio kr. Hvis inflationen er på 4 % hvad koster da det samme hus om 10 år?

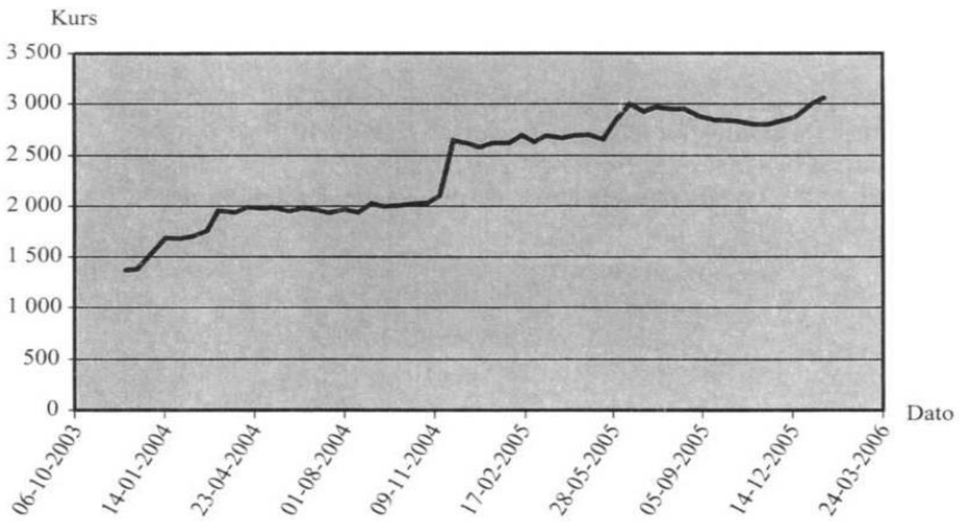
Facit: 1,2 3,0 4,4 4,6 7,5 12,6 150,5 1.270 1.380 11.325 12.379,8 18.032 32.852 282.852 3.802.156 4.511.915 7.549.246 9.258.123

Ekstra Opgave 9: (FSA2006dec)

5 Tivolis aktier

Man kan investere i Tivoli. Det gør man ved at købe aktier.

Prisen i kroner for en aktie kaldes aktiens kurs.



Grafen viser udviklingen af kursen på tivoliaktien i en periode.

5.1 Angiv kursen for en tivoliaktie den 9. november 2004.

5.2 Beregn forskellen mellem den højeste og laveste kurs for aktien i perioden.

5.3 Beregn værdien af tre aktier, når kursen er 2 960.

Julies forældre vil købe aktier i Tivoli til kurs 2 960.
De vil købe for højst 20000 kr.

5.4 Beregn, hvor mange aktier Julies forældre kan købe.

En del af fortjenesten i Tivoli udbetales som udbytte til de personer, der ejer aktier.
Det er besluttet, at der udbetales 10 kr. pr. aktie.

5.5 Hvor stort et beløb får Julies forældre i udbytte af de aktier, de lige har købt?

5.6 Beregn, hvor mange procent dette beløb udgør af det beløb, de betalte for aktierne.

I september 2002 købte Julies forældre en aktie i Tivoli til 1 320 kr.
I september 2005 var kursen 2 820.

5.7 Beregn, hvor mange procent værdien af aktien **er steget fra** 2002 til 2005.

5.8 Vis ved en beregning, at stigningen i aktiens **værdi svarer til en** årlig vækst på ca. 29%.

Facit: 0,34 6 25 60 114 1700 2060 2834 7000 8800

Mundtlig Matematik: Investeringen af friværdien

Du arbejder i en bank der skal rådgive en familie mht. at investere penge! De bor i et hus de købte tilbage i 1985 til 1,6 mio kr! Desværre for dem er deres gæld vokset til 2,5 mio kr i huset men til gengæld er deres hus steget i værdi så de nu regner med at kunne sælge det til 4,2 mio kr! Familien vil ikke sælge men til gengæld gerne låne penge i friværdien i huset og disse penge skal investeres så de giver et godt afkast til brug for en jordomrejse! De regner med at investere i 10 år!

Huset:

- **Gæld:** 2,5 mio kr
- **Anslået værdi:** 4,2 mio kr. (kan stige og falde efter markedes udvikling)
- **Lån i friværdi:** Friværdien er forskellen mellem gælden og værdien af huset! Man må låne op til 80 % af værdien af et hus i et realkredit institut som giver de laveste renter!
- **Låne betingelser:** rente på 1,5 % p.a. i 30 år (fast forrentet i real kredit!)

Investeringsmuligheder:

- **Guld:** feb 2010 til 1.080 $ pr 28,3 g guld steget til feb.2015 til 1.277 $ pr 28,3 g
- **Novo Nordisk Aktie:** Jan 2012 til 138 kr pr aktie steget til jan 2015 til 288 kr.
- **Olie:** Jan 2014 110 $ pr tønde til Jan 2015 til 50 $ pr tønde.
- **Wiskey:** 1 flaske Macallan-whisky købt for 6.250 £ i 1991 blev solgt for 23.000 £ i 2009.
- **Valuta:** køb fremmed valuta og tjen når kursen stiger. Undersøg selv en valuta!

Spørgsmål: *Du skal vurdere og rådgive familien i hvad de skal gøre for at investere deres penge de næste 10 år bedst?* Kom ind på følgende:

- *Hvor mange penge kan familien låne - hvor stor er friværdien?*
- *Hvad ville de tjene hvis pengene blev i huset og de ikke tog et lån?*
- *Hvis de låner hvad kommer det så dem til at koste?*
- *Undersøg hvilken investering der giver det største afkast*!
- *Vurder hvilken der er den sikreste & bedste investering*

Vedlæg din besvarelse til kompendiet!