

Navn: _____ Klasse: _____

Matematik Opgave Kompendium

Kombinatorik & Sandsynlighed



Pascal (f.1623)



Fermat (f.1601)

10	33	50	66	82
25	43	51	73	
38	49	67	88	

Opgaver: 22
Ekstra: 9
Mdt: 5
Point: _____

Sandsynlighedsregningen opstår som et resultat af Pascal & Fermats arbejde med et terningspil som stoppes før tid:

To personer A og B spiller et spil med lige store chancer for at vinde. Det kunne eksempelvis være plat og krone. De sætter hver et bestemt beløb ind og den, der først vinder 20 gange vinder hele puljen. Imidlertid må de afbryde spillet i utide på det tidspunkt, hvor A har vundet 6 spil og B har vundet 12 spil. Hvordan skal puljen deles?

Spørgsmålet er hvordan pengene skal fordeles imellem deltagerne – hvem har størst sandsynlighed for at vinde spillet?

Kombinatorik:

Kombinatorik er en metode til, at beregne på hvor mange måder man kan sætte forskellige ting sammen – dvs. kombinere dem på. I det følgende skal vi se på forskellige teknikker til at beregne dette.

Simpel Kombinatorik:

I de opgaver hvor der ikke er så mange ting der skal kombineres kan man blot skrive alle kombinationerne op på en lang liste. Lad os tage et eksempel:

Vi skal finde ud af hvor mange måder man kan kombinere et rødt-, gult- og grønt papir:

1 kombination: rødt, gult, grønt.

4 kombination: grønt, gult, rødt.

2 kombination: rødt, grønt, gult.

5 kombination: gult, grønt, rødt.

3 kombination: grønt, rødt, gult.

6 kombination: gult, rødt, grønt.

Der er altså 6 forskellige kombinationer som de 3 farver kan lægges i. Når man løser en sådan opgave er det nemmest at gå systematisk til værks – dvs. at man tager en farve af gangen og skriver alle kombinationer op for f.eks. rød først osv.

Opgave 1: Find antallet af kombinationer ved at skrive mulighederne op.

- a) Opskriv de forskellige måder hvorpå Bo, Ib og Ole kan stå på:

1 kombination: Bo Ib Ole

Kombinationer i alt: _____

- b) Opskriv de forskellige dansepar kan man lave af 3 Piger (Søs, bibi & Helle) og 3 drenge (Bo, Ib & Ole). **NB:** et dansepar består altid af en pige og en dreng.

Kombinationer i alt: _____

- c) Opskriv de forskellige bogstavkombinationer man kan få af A, B, C.

Kombinationer i alt: _____

Facit: 2 6 6 9 10

Kombinationstabel:

Hvis man har to forhold, som kan antage forskellige værdier, og man skal finde antallet af kombinationer imellem dem kan man anvende en kombinationstabel. Et klassisk eksempel på det er ved kast med 2 terninger. Hver terning kan have 6 udfald når den kastes hvilket kan sættes op i en tabel:

	1	2	3	4	5	6	← <u>Terning 1</u>
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	

→ Terning 2

Dvs. 2 terninger giver altså 36 mulige kombinationer.

Opgave 2: Lav kombinationstabellerne for forholdene og find antallet af kombinationer.

a) En terning kastes sammen med en mønt. På hvor mange måder kan de kombineres.

b) Hvor mange forskellige dansepar kan man lave af 3 piger og 5 drenge

c) En Opel, Fiat og en Mercedes fås hver i 6 forskellige farver. Hvor mange forskellige biler kan der fås?

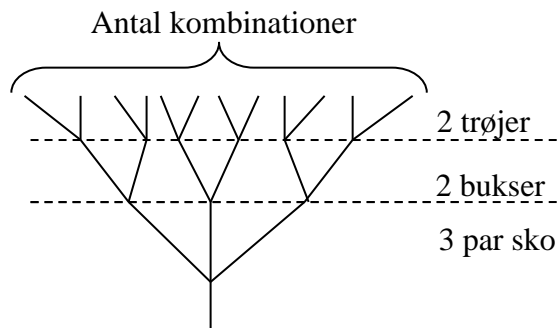
Ekstra Opgave 1: I en retvinklet trekant er længden af katete a 20 cm mens længden af katete b er 21 cm. Hvor lang er hypotenusen c? (tegn skitse)

Facit: 3 7 12 15 18 20 29 42

Tælletræet:

I et tælletræ tilføjes der en nyt sæt grene for hver kombinations mulighed. Når alle muligheder er lavet til grene kan antallet af kombinationer tælles ved at tælle ende grene.

Eks: En pige har 3 par sko, 2 par bukser og 2 trøjer. På hvor mange måder kan man kombinere tøjet:
Vi starter med at tegne 3 grene for hvert par sko. Hver af disse grene får herefter 2 grene for de 2 par bukser. Hver af disse grene får igen tilføjet 2 grene for de 2 trøjer.
Slutteligt kan endegrene tælles og her ses det at de kan kombineres på 12 forskellige måder.



Opgave 3: Find antallet af kombinationer ved at tegne tælletræer.

- På en burgerbar kan man selv sammensætte sin burger som man vil. Man kan vælge om bollen skal være med sesamfrø eller uden (2 valg), med ost eller uden (2 valg), med syltet agurk eller uden (2 valg). Lav et tælletræ over de forskellige burger kombinationer man kan få? (lav evt. et træ som ligger ned for at der er plads til det!)
- En man kan vælge imellem 3 trøjer (gul, grønt, blå) og 2 bukser (sort og blå). Tegn tælletræet og aflæs antallet af kombinationer.
- På en restaurant kan man vælge imellem 4 forretter, 3 hovedretter og 2 desserter. Lav et tælletræ der viser kombinationerne af en 3 retters menu og noter antallet af kombinationer.

Facit: 2 6 8 13 24

Multiplikations/gange princippet:

Et tælletræ kan benyttes til simple kombinations opgaver men bliver hurtig en meget kompliceret netværk af grene hvis antallet af muligheder stiger. Multiplikations princippet er løsningen på dette problem. Princippet går ud på, at man blot *ganger de forskellige muligheder med hinanden*.

Hvis vi ser på opgaven på forrige side hvor en pige har 3 par sko, 2 par bukser og 2 trøjer bliver kombinationerne således nemt at beregne:

$$\text{Kombinationer} = 3 * 2 * 2 = 12 \text{ kombinationer.}$$

Opgave 4: Beregn antallet af kombinationer vha. multiplikations princippet.

- a) En pige har talt alt i sit tøj skab. Hun har 25 trøjer, 8 bukser, og 10 par sko. På hvor mange måder kan hun gå klædt?

- b) På en restaurant kan man vælge imellem 5 forretter, 8 hovedretter og 4 desserter. Hvor mange forskellige 3 retters menuer kan man bestille?

- c) Når man bestiller en bil kan man selv bestemme følgende ting: farve (25 forskellige), med og uden elruder, med og uden aircondition, med og uden radio, med og uden alufælg. Hvor mange forskellige biler kan man vælge imellem?

- d) En pige har 4 hårdfarve midler, 5 læbestifte, 4 neglelak og 3 eye lighner. På hvor mange måder kan denne pige se ud?

- e) En fabrik laver vingummier i 5 forskellige former med 4 forskellige farver og 7 forskellige smagsvarianter. Hvor mange forskellige kombinationer af vingummi laves?

Opgave 5: Du skal beregne på hvor mange måder du selv kan gå klædt? Her regnes kun sko, bukser og trøjer med (kjole tæller for en trøje)! Der skal altså laves en optælling af dit tøjskab - og i den forbindelse nok også sorteres ud ;)

Facit: 140 160 240 400 500 2.000 3.000

Kombinatorik med stikprøver: En stikprøve er når man tager en ting ud af en bestemt mængde. Det kan f.eks. være at man har en pose med 4 kugler i. Når man tager en stikprøve tager man så en tilfældig kugle op af posen og kigger på hvad det blev. Når man snakker stikprøver deles den op i forskellige kategorier:

- Uden tilbagelægning
- Med Tilbagelægning

Kombinatorik med Stikprøve uden tilbagelægning (uordnet):

Vi skal finde ud af på hvor mange måder man kan tage en stikprøve ud af en mængde. Lad os se på posen med de 4 kugler. På hvor mange forskellige måder kan man trække 3 kugler op af posen? Første gang vi trækker er der 4 kugler at vælge imellem. Dvs. vores tælletræ har 4 grene. Herefter er der jo kun 3 kugler at vælge imellem. Dvs. hver af de 4 grene får 3 nye grene. Sidst er der kun 2 kugler at vælge imellem. Ved at bruge multiplikationsprincippet fås:

$$\text{Kombinationer} = 4 * 3 * 2 = 24 \text{ kombinationer}$$

Matematikere har samlet dette til følgende formel som lommeregneren også kan bruge:

$$P(n, r) = n * (n - 1) * (n - 2) * (n - 3) * \dots$$

}
r gange

hvor n = mængden, r = antal stikprøver

P = permutationer

$$P(4, 3) = 24$$



Skrives: 4 nPr 3

Opgave 6: Benyt princippet bag stikprøver uden tilbagelægning til at løse opgaverne.

- I en æggebakke er der 4 æg. På hvor mange måder kan man placere æggene?
- I en æggebakke er der 6 æg. På hvor mange måder kan man placere æggene?
- I en klasse er der 8 drenge. Hvor mange forskellige hold af 2 kan man lave til en bordtenniskamp?
- På et dansehold er der 4 drenge og 5 piger. Hvor mange forskellige dansepar kan man lave?
- Hvis målmanden skal stå bagerst og anføreren forrest på hvor mange måder kan man så stille et fodboldhold op på 11 mand?

Facit: 5 20 24 32 56 120 720 362.880 420.850

Kombinatorik med stikprøve med tilbagelægning (ordnet):

I denne type af stikprøve lægges prøven tilbage igen. Hvis vi kigger på posen med de 4 kugler betyder det at kuglen lægges tilbage. Dvs. at der ved hver stikprøve er det samme antal kugler og valgmuligheder nemlig 4. Hvis vi tager 3 kugler op af posen må det give:

$$\text{Kombinationer} = 4 * 4 * 4 = 4^3 = 64$$

Matematikere har samlet dette til følgende formel:

$$\text{Pm}(n, r) = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{r \text{ gange}} = n^r \quad \text{Pm}(4,3) = 4^3 = 64$$

hvor n = mængden, r = antal stikprøver

Opgave7: Benyt princippet bag stikprøver med tilbagelægning til at løse opgaverne.

- I en klasse er der 18 elever. I løbet af en time stiller læreren 4 spørgsmål. På hvor mange forskellige måder kan læreren vælge elever til at svare på spørgsmål?
- En adgangskode består af 4 cifre. Hvert af disse cifre kan være et tal fra 0 til 9 (altså 10 cifre). Hvor mange forskellige koder kan man lave?
- En gammel basta lås har 6 forskellige pinde som hver kan være i 3 positioner (ind, midt og ud). Hvor mange forskellige låse kombinationer kan man lave?
- En adgangskode består af 5 tegn. Et tegn kan enten være et ciffer eller et bogstaver (28 forskellige). Hvor mange forskellige koder kan man lave?
- Tip en 13'er har 3 svarmuligheder for hver kamp. På hvor mange forskellige måder kan man udfylde en tipskupon?
- I en multiplechoiceprøve er der 10 spørgsmål. For hvert spørgsmål er der 3 svarmuligheder. På hvor mange måder kan man udfylde prøven?
- Prøven udvides med 4 svarmuligheder i stedet for 3. Hvor mange flere kombinationer giver det?

Facit: 729 850 10.000 59.049 104.976 989.527 1.594.323 20.125.520 79.235.168

Opgave 8: Vi ryster posen og løser blandede kombinatorik stykker

- a) En ølfabrik har 3 forskellige flasketyper, 2 forskellige kapsler og 8 forskellige slags øl. Hvor mange forskellige flasker øl kan de lave?
- b) 6 mennesker skal stilles op på række. På hvor mange måder kan de stå?
- c) Et bord, en stol og en seng skal males i enten rød eller blå. På hvor mange måder kan man male de 3 ting?
- d) Et flag har 3 felter som skal farvelægges med farverne: rød, grøn, sort, gul og hvid. Hvor mange forskellige flag kan man lave når man kun må bruge hver farve 1 gang i flaget?
- e) I en klasse på 24 elever skal der vælges elever til elevrådet hvor to elever fra klassen skal sidde. Hvor mange forskellige elevråd kan man sammensætte ud fra klassen?
- f) En rød, en gul og en hvid terning kastes samtidig. Hvor mange forskellige kombinationer kan der opstå?
- g) En pinkode består af 4 cifre. Beregn hvor mange forskellige koder der kan laves når koden ikke må indeholde cifret 0?

Ekstra Opgave 2: Løs kombinatorik stykkerne

- a) En bank ønsker at lave en pinkode på 4 cifre hvor hvert tal kun må blive benyttet en gang i koden af sikkerhedsårsager. Hvor mange forskellige koder kan der laves hvis koden heller ikke må indeholde cifret 0?
- b) En nummerplade til en bil består af 2 bogstaver og 5 cifre. Hvor mange forskellige nummerplader kan der laves hvis alle bogstaver må benyttes med undtagelse af I, Q, Æ, Ø og Å? (Antag at der er 28 bogstaver)
- c) På hvor mange måder kan man trække 4 kort ud af et kortspil med 52 kort?

Facit: 2 8 48 60 125 216 552 720 3.024 6.561 20.561 6.497.400 52.900.000

Sandsynlighed:

Sandsynlighed handler om at kunne beregne chancen for at noget bestemt sker. Det som sker kaldes for et udfald og hvis dette udfald var hvad vi havde håbet på kaldes det for et *gunstigt udfald* (gunstig= til ens fordel). Sandsynligheden for, at et gunstigt udfald indtræffer, må nødvendigvis afhænge af hvor mange forskellige udfald der er. Når man kaster en mønt er der to mulige udfald – men vi håber kun på, at det er den ene side som vender op ad, hvilket der logisk må være 50 % chance for. Omvendt har en terning 6 forskellige udfald fordi den har 6 tal. Derfor må chancen for at få slå en 6'er være en ud af 6 ($1/6 = 16,7\%$).

Dvs. at vi kan stille sandsynligheden op som en brøk:

$$\text{Sandsynligheden} = \frac{\text{gunstige_udfald}}{\text{mulige_udfald}}$$

Normalt beregnes sandsynligheder i procenter men man kan også angive en brøk som svar.

Eksempel:

Vi starter i hjertet af sandsynlighedsregningen nemlig kortspil hvor denne matematikgren tog sit udspring. Hvad er sandsynligheden for at trække en konge ud af et kortspil på 52 kort?

$$\text{Sandsynlighed for konge} = \frac{4}{52} * 100\% = 7,7\%$$

Forklaring: der er jo 4 konger i et spil – altså 4 gunstige udfald ud af 52 mulige udfald.

Opgave 9: Beregn sandsynlighederne i tekststykkerne (afrund til helt tal)

- Hvad er sandsynligheden for at trække en hjerter konge i et kortspil?
- Hvad er sandsynligheden for at trække et spar kort?
- Hvad er sandsynligheden for at trække en dame eller en konge?
- Hvad er sandsynligheden for ikke at trække et billedkort?
- Hvad er sandsynligheden for slå en 6'er eller 2'er med en terning?
- Hvad er sandsynligheden for ikke at slå en 6'er med en terning?

Facit: 2 9 15 25 29 33 77 83 102

Simpel Sandsynlighed:

Når man beregner sandsynligheder er det en god ide at man kan omsætte de mest almindelige brøker til procent.

Opgave 10: Omskriv brøkerne til procent. Husk $1/8$ er halvdelen af $1/4$. (ingen lommeregner)

- | | | | |
|---------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| a) $\frac{1}{2} = \underline{\quad\quad\%}$ | d) $\frac{1}{25} = \underline{\quad\quad\%}$ | g) $\frac{7}{10} = \underline{\quad\quad\%}$ | j) $\frac{1}{10} = \underline{\quad\quad\%}$ |
| b) $\frac{1}{4} = \underline{\quad\quad\%}$ | e) $\frac{2}{3} = \underline{\quad\quad\%}$ | h) $\frac{3}{5} = \underline{\quad\quad\%}$ | k) $\frac{1}{3} = \underline{\quad\quad\%}$ |
| c) $\frac{3}{4} = \underline{\quad\quad\%}$ | f) $\frac{1}{8} = \underline{\quad\quad\%}$ | i) $\frac{1}{5} = \underline{\quad\quad\%}$ | l) $\frac{1}{20} = \underline{\quad\quad\%}$ |

Opgave 11: Løs de simple sandsynligheds stykker. (ingen lommeregner – brug brøkerne)

- En klasse består af 8 piger og 12 drenge. Hvad er sandsynligheden for at vælge en pige i klassen?
- I en pose er der 3 hvid kugler og 7 sorte. Hvad er sandsynligheden for at vælge en hvid kugle fra posen?
- I spejdernes lokale tombola er der 100 lodder. Peter køber 5 lodder. Hvad er sandsynligheden for at han vinder præmien som er en lækker sovepose?
- Jens skal tilfældigt vælge en farve fra en æske. I æsken er der 25 forskellige farver. Hvad er sandsynligheden for at vælge en rød farve hvis der er 5 forskellige røde farver?
- I et lykkehjul er der 20 numre. Bibi køber 2 numre. Hvad er hendes sandsynlighed for at vinde?
- I en klasse med 25 elever skal man trække lod om hvem som skal være duks i næste uge. Hver elev har en seddel med sit navn på som lægges i en pose. Læreren tager et lod seddel op af posen. Hvad er sandsynligheden for at Frederik står på sedlen?
- En af eleverne i klassen har proppet 5 ekstra sedler med navnet Frederik i posen uden, at læreren så det. Hvad er sandsynligheden for at Frederik bliver doks i næste uge?

Facit: 1 4 4 5 5 10 10 12,5 17 20 20 20 25 30 33 40 45 50 60 66 70 75 85

Sandsynlighed ved højest, mindst eller ikke:

Ofte i sandsynlighedsregning er det ikke et udfald som er gunstigt men en gruppe af udfald som giver gevinst. Et eksempel på denne slags sandsynlighedsopgaver kunne være:

Hvad er sandsynligheden for højest at slå en 4'er med en terning?

Her må de gunstige udfald være 1, 2, 3 og 4 og derfor bliver sandsynligheden til:

$$\text{Sandsynlighed} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 66\%$$

Hvis der i opgaven i stedet for højest havde stået mindst eller ikke var det en anden opgave:

- **Mindst:** alle udfald fra nr 4 og op. Dvs. 4 og 5 og 6
- **Ikke:** alle andre udfald end nr 4. Dvs. 1, 2, 3, 5 og 6.

Opgave 12: Beregn sandsynlighederne når der er flere gunstige udfald. (afrund til 1 decimal)

- Hvad er sandsynligheden for mindst at slå en 4'er med en terning?
- Hvad er sandsynligheden for ikke at slå en 4'er med en terning?
- Hvad er sandsynligheden for højest at slå en 2'er
- I et lotteri er der 20 numre. Hvad er sandsynligheden for ikke at trække nr 3?
- I et lotteri er der 20 numre. Hvad er sandsynligheden for mindst at trække nr 15?
- I et lotteri er der 20 numre. Hvad er sandsynligheden for ikke at trække et lige tal?
- I et lotteri er der 10 numre. Hvad er sandsynligheden for højest at trække nr 4?
- Hvad er sandsynligheden for ikke at trække en konge i et kortspil på 52 kort?
- Hvad er sandsynligheden for højest at trække en 6'er? (es tæller for 1)
- Hvad er sandsynligheden for ikke at trække et billedkort?

Ekstra Opgave 3: 94 kr sættes ind på en konto til en rente på 3 % pa. Hvor mange penge står der på kontoen efter 4 år? (afrund til helt antal kroner)

Facit: 5 6 30 33,3 40 46,2 50 50 55 76,9 75 83,3 92,3 95 100 106 112

Sandsynlighed og kombinatorik:

Kombinatorik benyttes i sandsynlighedsregning til at hjælpe med at beregne sandsynligheder hvor antallet af udfald ikke er så lige til som ved kast af en enkel terning. I nogle opgaver kan man med fordel anvende en kombinationstabel!

Lad os se på et eksempel med terningekast med 2 terninger:

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Dvs. vi har 36 forskellige udfald men. Når vi har beregnet antallet af udfald er det nemt at beregne sandsynligheden af forskellige udfald.

Eksempel:

Hvad er sandsynligheden for at slå en 2'er og en 3'er?

$$\text{Sandsynlighed 2'er og 3'er} = \frac{2}{36} * 100 = 5,6 \%$$

Forklaring: Der må jo være 2 gunstige udfald fordi vi har to terningekombinationer 2,3 og 3,2!

Opgave 13: Beregn sandsynlighederne i tekststykkerne (afrund til 1 decimal)

- Hvad er sandsynligheden for at slå to 6'ere?
- Hvad er sandsynligheden for at slå en 6'er på en af terningerne?
- To kroner kastes. Hvad er sandsynligheden for at begge lander på plat?
- En krone og en terning kastes. Hvad er sandsynligheden for at slå en 6'er og plat?

Facit: 2,8 8,3 10 25 30,6 45

Terningekast og summen af øjnene:

I mange terningespil får man point efter hvad summen af øjnene er. Her kan man ligeledes stille en kombinationstabel op og beregne sandsynligheder ved forskellige kast.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Eksempel:

Hvad er sandsynligheden for at slå summen 11?

$$\text{Sandsynlighed} = \frac{2}{36} * 100 = 5,6 \%$$

Opgave 14: Beregn sandsynligheden ved terningekastene

- Hvad er sandsynligheden for at slå summen 4?
- Hvad er sandsynligheden for at slå summen 8?
- Hvilken sum er der størst sandsynlighed for at slå?
- Hvad er sandsynligheden for højest at slå summen 5?
- Hvad er sandsynligheden for ikke at slå summen 12?
- Hvad er sandsynligheden for mindst at slå summen 8?
- Hvad er sandsynligheden for at slå en sum mindre end 11?

Ekstra Opgave 4: find x i $\frac{5x^2 + 6}{4} = \frac{2x^2 + 5}{2}$

Facit: 2 2 7 8,3 13,9 21,2 27,8 41,7 55,7 91,7 97,2 102,5

Sandsynlighed ved stikprøve uden tilbagelægning:

I de sandsynligheder vi har beregnet tidligere har vi kun set på en enkel udtrækning eller et udfald. Hvis vi derimod også skal kunne beregne sandsynligheden for at flere udfald indtræffer efter hinanden må man benytte en anden taktik. Her skal vi bruge det vi lærte om *multiplikations princippet* i kombinatorik.

Posen med kugler:

Vi skal se på et klassisk sandsynligheds eksempel. En pose er fyldt med 3 hvide og 7 sorte kugler.

Hvad er sandsynligheden for at trække 2 hvide kugler op af posen efter hinanden?

For at svare på det må vi se på hvad sandsynligheden for en hvid kugle er i første udtrækning!

$$\text{Sandsynlighed første udtrækning} = \frac{3}{10} = 30 \%$$

Herefter ser vi på hvad sandsynligheden herefter er at trække en hvid kugle! I posen er der jo kun 2 hvide kugler tilbage fordi vi har fjernet. Samtidig må det samlede antal af kugler være 9 kugler.

$$\text{Sandsynlighed anden udtrækning} = \frac{2}{9} = 22,2 \%$$

Den samlede sandsynlighed for at trække 2 hvide kugler findes herefter ved at multiplicere de to sandsynligheder med hinanden ligesom i multiplikations princippet!

$$\text{Samlet sandsynlighed} = \frac{3}{10} * \frac{2}{9} = \frac{6}{90} * 100 = 6,7 \%$$

Opgave 15: I en pose er der 5 hvide kugler og 10 røde kugler.

- Hvad er sandsynligheden for at trække 2 røde kugler op af posen?
- Hvad er sandsynligheden for at trække 2 hvide kugler?
- Hvad er sandsynligheden for først at trække en hvid og derefter en rød kugle?
- Hvad er sandsynligheden for først at trække en rød og derefter en hvid kugle?
- Hvad er sandsynligheden for at trække 3 røde kugler?
- Hvad er sandsynligheden for at trække 3 hvide kugler?

Facit: 2,2 8,3 9,5 23,8 23,8 26,4 29,8 37,0 42,9 50,8

Opgave 16: I en pose er der 3 røde, 6 gule og 7 sorte kugler. (afrund til 1 decimal)

- a) Hvad er sandsynligheden for at trække 2 gule kugler?
- b) Hvad er sandsynligheden for at trække 2 sorte kugler?
- c) Hvad er sandsynligheden for at trække 3 røde kugler?
- d) Hvad er sandsynligheden for at trække en sort kugle, derefter en gul og sidst en rød?

Opgave 17: Et kortspil har 52 kort

- a) Hvad er sandsynligheden for at trække 2 konger ud af et kortspil?
- b) Hvad er sandsynligheden for at trække 2 spar kort?
- c) Hvad er sandsynligheden for at trække 3 billedkort?
- d) Hvad er sandsynligheden for at ikke at trække et spar kort 3 gange i træk?

Opgave 18: I en pose karameller er der 10 med lakrids, 5 med jordbær og 6 med citron.

- a) Hvad er sandsynligheden for at trække 2 lakrids karameller?
- b) Hvad er sandsynligheden for først at trække en citron, derefter jordbær og sidst citron?
- c) Hvad er sandsynligheden for ikke at trække 2 lakridser i træk?

Ekstra Opgave 5: I lotto trækkes lod imellem 36 tal. Hvad er sandsynligheden for at trække 7 rigtige? (Husk: man har selv 7 tal på sin lotto kupon og udtrækningen skal ramme de 7 tal)

Facit: 0,000012 0,006 0,2 0,5 1,0 1,9 3,8 5,0 5,9 9,2 12,5 17,5 21,4 26,2 33,2 41,4 52,3

Sandsynlighed ved stikprøve med tilbagelægning:

Når man har en række af udfald hvor vores stikprøve lægges tilbage er bliver antallet af mulige udfald ikke mindre. Vi kan derfor bruge vores viden fra kombinatorik afsnittet til at beregne sandsynligheden. Et klassisk eksempel på dette er terningekast hvor hver terning repræsenterer en stikprøve. I sagens natur vil en terning altid være med tilbagelægning fordi man jo kan slå det samme tal flere gange!

Eksempel:

Hvad er sandsynligheden for at slå en tre 6'ere?

$$\text{Sandsynlighed} = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * 100 = 0,5 \%$$

Opgave 19: Løs sandsynlighedsopgaverne ved terningekast

- Hvad er sandsynligheden for at slå tre lige tal med 3 terninger?
- I Yatzy slår man med 5 terninger. Hvis alle terninger viser det samme tal har man fået Yatzy. Hvad er sandsynligheden for at slå 5 ens terninger? (viser samme antal øjne)
- Hvad er sandsynligheden for ikke at slå nogen 6'ere ved kast med 4 terninger?
- Hvad er sandsynligheden for at alle øjne højst er 3 ved terningekast med 4 terninger?
- Hvad er sandsynligheden for ikke at slå nogen 6'er overhovedet ved terningekast med 10 terninger?

Ekstra opgave 6: I terningespillet Meyer kaster man med 2 terninger. Hvis terningerne lander på 1 og 2 får man Meyer og vinder. Du skal beregne sandsynligheden for at slå Meyer!

Husk: At der er to muligheder for at slå Meyer nemlig 1,2 og 2,1. Hvad må den samlede sandsynlighed være så?

Facit: 0,01 2,3 5,6 6,3 12,5 16,2 32,8 48,2 52,8

Opgave 20: Løs de forskellige sandsynligheds opgaver med tilbagelægning.

- Hvad er sandsynligheden for at en lærer tilfældigt vælger den samme elev 2 gange ud fra klassen - hvis der er 24 elever i klassen?
- Hvad er sandsynligheden for at den samme person både bliver kattedronning og kattekonge til fastelavn hvis der er 20 børn til tøndeslagning?
- Bente kan ikke lide lakrids karameller. I en pose er der 30 karameller og ud af disse er 5 lakrids karameller. Den første hun tager op af posen er tilfældigvis en lakrids karamel som hun lægger tilbage igen (med tilbagelægning). Uheldigvis for hende er den næste hun tilfældigt vælger også en lakrids karamel. Hvad er sandsynligheden for dette uheld?
- I en pose æbler er der 2 råddne og 8 gode æbler. Bertram tager først et rådden æble op af posen men lægger det tilbage (i stedet for at smide det ud!). Hvad er sandsynligheden for at han vælger et råddent æble to gange i træk?
- I tip en 13'er er der 13 spørgsmål/kampe hvor der til hver kamp er 3 svarmuligheder. Kun en af svarmulighederne er rigtig. Hvad er sandsynligheden for at få alle 13 spørgsmål rigtige?

Additions/Plus princippet:

Vi skal se på hvad sandsynligheden er for at slå to 6'ere med 3 terninger?

$$\text{Sandsynlighed to 6'ere} = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{5}{6} * 100 = 2,3 \%$$

Den sidste terning er jo ikke en 6'er så derfor er der 5 at vælge imellem!

De 2,3 % i sandsynlighed er jo kun for kombinationen 6,6,X. Hvad med 6,X,6 eller X,6,6? De tæller jo også med. Derfor bliver vi nød til at lægge disse sandsynligheder til!

$$\text{Samlet sandsynlighed} = 3 \text{ kombinationer} * 2,3 \% = 6,9 \%$$

Ekstra opgave 7:

Hvad er sandsynligheden for at få en 12'er i Tip en 13'er. Dvs. at 12 ud af de 13 spørgsmål er rigtige (husk 3 svarmuligheder til hvert spørgsmål)

Facit: 0,00006 0,0005 0,0016 0,15 0,17 0,2 0,25 0,3 2,8 4 5,3

Opgave 21: Repetitionsopgaver

- a) På en restaurant kan man vælge imellem 3 forretter, 5 hovedretter og 4 desserter. Hvor mange forskellige 3 retters menuer kan man vælge imellem?
- b) I DM i kvindeholdbold er der følgende deltager: GOG, Ålborg, Viborg, Ikast, FCK og Slagelse. Hvor mange forskellige finalekampe er mulige?
- c) I et lottospil er der 16 tal. De 4 af tallene skal man afkrydse – på hvor mange forskellige måder kan man krydse de 4 tal af?
- d) En pinkode består af 4 cifre og hvert af cifrene kan være: 1,2,3 og 4. Hvor mange forskellige pinkoder kan man lave?
- e) I en pose er der 8 sorte, 7 brune, 9 hvide og 6 gule kugler. Hvad er sandsynligheden for at vælge en gul kugle?
- f) Hvad er sandsynligheden for at trække 2 gule kugler op af posen?
- g) Hvad er sandsynligheden for at svare rigtigt på 5 spørgsmål hvis der til hvert spørgsmål er 2 svarmuligheder?
- h) Hvad er sandsynligheden for at trække to konger ud af et kortspil?
- i) I et bankospil har man en plade med 15 numre med tal fra 1 til 90. På din plade har du gamle ole (nr 90). Hvad er sandsynligheden for at gamle Ole bliver råbt op som det første tal?
- j) Hvad er sandsynligheden for at det første tal som råbes op til banko er på din spilleplade?

Ekstra Opgave 8: Løs sandsynligheds opgaverne

- a) Hvad er sandsynligheden for at et par får 3 piger?
- b) Hvad er sandsynligheden for kun at få drenge hvis man får 4 børn?
- c) Hvad er sandsynligheden for at få 2 piger og 1 dreng i tilfældig rækkefølge?

Facit: 0,1 0,5 1,1 3,1 3,4 5,6 6,3 12,5 16,7 20 25 30 37,5 60 105 256 38.425 43.680

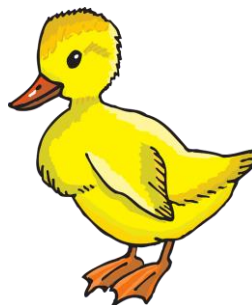
Opgave 22: Færdighedsregning

- Hvad er sandsynligheden for at få en 6'er ved kast med en terning?
- Hvad er sandsynligheden for at få 2 stks 6'ere ved kast med 2 terninger?
- Hvad er sandsynligheden for at slå et lige tal med en terning?
- Hvor mange forskellige bogstavsplader med 3 felter kan man lave med A'er & B'er?
- I et talloteri er der tal fra 1 til 90. Hvad er sandsynligheden for at trække nr 63 første gang?
- Hvad er sandsynligheden for at et tal fra 1 til 15 bliver udtrukket?

Ekstra Opgave 9: Problemregning

I Fiskedammen svømmer 54 plastikænder rundt. Hver and har et farvet mærke i bunden.

- 7 ænder med gul farve
- 9 ænder med hvid farve
- 19 ænder med rød farve
- 19 ænder med blå farve



For 15 kr. får man lov til at fange tre ænder.

- Bestem sandsynligheden for at få en gul and i første fangst?

Charlotte har fanget to ænder med hvide mærker. Hun mangler så at fange en tredje and.

- Hvor stor er sandsynligheden for, at Charlotte får en 1. præmie?

Julie overvejer sandsynligheden for at få "Frit valg på alle hylder" - 3 gule mærker/ænder

- Beregn denne sandsynlighed?

Facit: 0,14 0,9 1/90 1,1 1/36 2,8 1/12 5 8 8,3 14/89 10,2 13 13,5 15,7 1/6 1/6 16,7 16,7 16,7 45 50 50,2 65 105 120



Mundtlig Matematik: Håndbold turen

I din fritid er du med på et håndboldhold som skal til en turnering i Prag i påsken (Prague Handball Cup). I skal køre der ned i bus sammen med et andet hold og 2 af jeres forældre på holdet tager også med for at hjælpe med, at tale Tjekkisk og drikke Urquel. Du glæder dig rigtig meget til at se Prag og spille håndbold - da ulykken indtræffer. Jeres klub har ikke råd til at betale turen for jeres træner og hjælpetræner og uden dem vil det ikke kunne gå! Turen står derfor til at gå i vasken - hvis altså holdet ikke kan skaffe pengene på anden vis. Det er her, at du får den fantastiske ide at lave et lotteri eller spil af en art til klubbens julefrokost hvor folk kan vinde noget. På denne måde ville man kunne skaffe penge til deres billet! Flere af de andre - som er lidt dovne anlagte - mener at det nemmeste vil være at alle på holdet betaler lidt ekstra så de har råd til også at tage med!

Holdet: 7 spillere + 4 udskifter + 2 trænere + 2 forældre (det andet hold har samme størrelse)

Transport med Bus: 50.000 kr med plads til 54 personer

Overnatning:

- Pris: 400 koruna pr nat pr person inklusiv morgenmad
- Kurs på Koruna: 27
- Antal overnatninger: 6.

Mad: frokost & aftensmad betaler man selv.

Spørgsmål: Du skal konstruere et spil som kan give det nødvendige overskud og stille beregninger op der kan overbevise dine dovne holdkammerater. Du kan komme ind på følgende:

- Hvad er den samlede pris pr deltager for transport & hotel?
- Hvad vil prisen være hvis de andre der skal med fra holdet skal betale trænerens billet?
- Hvilken sandsynlighed skal der være for at vinde i dit spil
- Kan man tjene pengene ind på spillet?

Vedlæg din besvarelse til kompendiet!