

Navn: _____ Klasse: _____

Matematik Opgave Kompendium

Statistik (kort)



Følgende gennemgås

- Gennemsnit/Middelværdien
- Mindste- & Størsteværdi & Variationsbredden
- Medianen
- Hyppigheden
- Frekvensen
- Summeret Hyppighed & Frekvens
- Grupperede Observationer
- Histogram, Stolpe & Pindediagrammer

Opgaver: 13

Ekstra: 3

Point: _____

Statistik:

*Statik handler om hvordan man bearbejder og analyserer og præsenterer data iform af tal. I matematik og ikke mindst samfundet er statistik et vigtigt redskab og benyttes ofte indenfor journalistik, virksomheder, og ikke mindst indenfor politik. Specielt indenfor politik er det blevet normalt at kaste om sig med tal, analyser og grafer. Netop derfor er det *uhyre vigtigt for borgerne i et demokratisk samfund at de er ved noget om statistik* da politikere ofte benytter det som et redskab til at fremme deres politik og udlægning af virkeligheden (altså manipulation). Statistik er tal og som sådan objektive men analysen af tallene og tolkningen af graferne afhænger af øjnene der ser og er altså med andre ord subjektiv!*

Indenfor statistik findes en masse begreber som skal læres for at kunne arbejde med tallene. I det følgende vil vi se på de grundlæggende begreber.

Observationer:

De tal som indsamles og udgør det statistiske datamateriale kalder man for observationer.

Observationerne behøver ikke alle at være forskellige! Lad os se på et eksempel. Nedenfor ses en tabel over 25 elevers alder i en 1g klasse. Hver af deres aldre er en observation men som man kan se så er der flere af observationerne som er ens!

Adam	15	Emilie	17	Juliane	18	Mikkel	16	Nikolaj	16
Amanda	16	Frederik	16	Lars	15	Mischa	16	Patricia	15
Artemis	17	Hans	18	Mads	16	Monika	16	Peter	16
Christian	16	Helen	16	Marie	17	Natascha	15	Tobias	17
Dan	17	Jonathan	17	Mathias	15	Niki	17	Tora	19

Gennemsnit / Middelværdien:

Når man beregner gennemsnittet lægger man alle observationer sammen og dividerer med antallet af observationer!

$$\text{Gennemsnit} = \frac{\text{Alle_observationer_lagt_sammen}}{\text{antal_observationer}}$$

$$\text{Gennemsnit} = \frac{15+16+17+16+17+17+16+18+16+17+18+15+16+17+15+16+16+16+15+17+16+15+16+17+19}{25}$$

$$\text{Gennemsnit} = \frac{409}{25} = 16,36$$

Opgave 1: Beregn gennemsnittet

a) Beregn gennemsnittet af klassens skostørrelser?

Adam	45	Emilie	38	Juliane	37	Mikkel	44	Nikolaj	44
Amanda	38	Frederik	45	Lars	46	Mischa	42	Patricia	37
Artemis	44	Hans	40	Mads	45	Monika	38	Peter	42
Christian	42	Helen	40	Marie	41	Natascha	36	Tobias	44
Dan	43	Jonathan	43	Mathias	39	Niki	44	Tora	38

Gennemsnit =

b) Beregn gennemsnittet af klassens fraværs timer?

Adam	2	Emilie	8	Juliane	30	Mikkel	0	Nikolaj	5
Amanda	0	Frederik	0	Lars	8	Mischa	8	Patricia	2
Artemis	10	Hans	12	Mads	2	Monika	45	Peter	10
Christian	22	Helen	15	Marie	9	Natascha	10	Tobias	16
Dan	8	Jonathan	6	Mathias	7	Niki	18	Tora	6

Gennemsnit =

c) Beregn gennemsnittet af sendte sms'er i klassen?

Adam	2	Emilie	20	Juliane	30	Mikkel	8	Nikolaj	3
Amanda	10	Frederik	15	Lars	18	Mischa	12	Patricia	16
Artemis	6	Hans	20	Mads	10	Monika	4	Peter	8
Christian	2	Helen	25	Marie	28	Natascha	35	Tobias	22
Dan	8	Jonathan	6	Mathias	8	Niki	12	Tora	12

Gennemsnit =

d) Beregn gennemsnittet af klassens matematik prøve?

Adam	4	Emilie	7	Juliane	12	Mikkel	10	Nikolaj	7
Amanda	02	Frederik	4	Lars	7	Mischa	7	Patricia	4
Artemis	12	Hans	7	Mads	10	Monika	7	Peter	10
Christian	10	Helen	4	Marie	4	Natascha	12	Tobias	4
Dan	7	Jonathan	10	Mathias	02	Niki	10	Tora	7

Gennemsnit =

e) Beregn gennemsnittet af klassens højder?

Adam	185	Emilie	168	Juliane	158	Mikkel	188	Nikolaj	182
Amanda	170	Frederik	186	Lars	180	Mischa	190	Patricia	170
Artemis	165	Hans	175	Mads	185	Monika	175	Peter	185
Christian	175	Helen	155	Marie	165	Natascha	175	Tobias	195
Dan	190	Jonathan	195	Mathias	178	Niki	180	Tora	170

Gennemsnit =

Facit: 6,8 7,2 8,2 8,32 10,36 11,82 12,81 13,60 13,72 40,8 41,4 42,8 168,6 171,8 177,6

Typetallet:

Typetallet er den observation der forekommer flest gange - dvs. det typiske tal!

Hvis vi ser på eksemplet med klassens alder:

15 16 17 16 17 17 16 18 16 17 18 15 16 17 15 16 16 16 15 17 16 15 16 17 19

Så vil man se at den observation der er flest af er 16 år. Derfor er typetallet 16.

Opgave 2: Find typetallet i klassens data (der tages udgangspunkt i data fra forrige side!)

- a) Find typetallet af klassens skostørrelser?

45 38 44 42 43 38 45 40 40 43 37 46 45 41 39 44 42 38 36 44 44 37 42 44 38

Typetal = _____

- b) Find typetallet af klassens fraværs timer?

2 0 10 22 8 8 0 12 15 6 30 8 2 9 7 0 8 45 10 18 5 2 10 16 6

Typetal = _____

- c) Find typetallet af sendte sms'er i klassen?

2 10 6 2 8 20 15 20 25 6 30 18 10 28 8 8 12 4 35 12 3 16 8 22 12

Typetal = _____

- d) Find typetallet af klassens matematik prøve?

4 2 12 10 7 7 4 7 4 10 12 7 10 4 2 10 7 7 12 10 7 4 10 4 7

Typetal = _____

- e) Find typetallet af klassens højder?

185 170 165 175 190 168 186 175 155 195 158 180 185 165 178 188 190 175 175 180 182
170 185 195 170

Typetal = _____

NB: Der kan i et datasæt være flere typetal hvis der ikke er en der er flest af. I excel vil den da angive den mindste observation som typetallet!

Facit: 6 7 8 8 10 42 44 175 185

Mindste- og Størsteværdien:

Mindsteværdien er den mindste observation mens størsteværdien er den største værdi!

I vores eksempel med klassens alder

15 16 17 16 17 17 16 18 16 17 18 15 16 17 15 16 16 16 15 17 16 15 16 17 19

Bliver mindsteværdien 15 og størsteværdien 19.

NB: mange tror at mindsteværdien er den observation der forekommer færrest gange i datasættet - men dette er forkert!

Opgave 3: Find mindste og størsteværdien i klassens data!

- a) Find mindste- & størsteværdien af klassens skostørrelser?

45 38 44 42 43 38 45 40 40 43 37 46 45 41 39 44 42 38 36 44 44 37 42 44 38

Mindsteværdien = _____ Størsteværdien = _____

- b) Find mindste- & størsteværdien af klassens fraværs timer?

2 0 10 22 8 8 0 12 15 6 30 8 2 9 7 0 8 45 10 18 5 2 10 16 6

Mindsteværdien = _____ Størsteværdien = _____

- c) Find mindste- & størsteværdien af sendte sms'er i klassen?

2 10 6 2 8 20 15 20 25 6 30 18 10 28 8 8 12 4 35 12 3 16 8 22 12

Mindsteværdien = _____ Størsteværdien = _____

- d) Find mindste- & størsteværdien af klassens matematik prøve?

4 2 12 10 7 7 4 7 4 10 12 7 10 4 2 10 7 7 12 10 7 4 10 4 7

Mindsteværdien = _____ Størsteværdien = _____

- e) Find mindste- & størsteværdien af klassens højder?

185 170 165 175 190 168 186 175 155 195 158 180 185 165 178 188 190 175 175 180 182
170 185 195 170

Mindsteværdien = _____ Størsteværdien = _____

Facit: -1 0 2 2 3 10 12 32 35 36 41 45 46 50 145 155 185 195

Variationsbredden:

Variationsbredden er forskellen imellem den største- og mindsteværdi

$$\text{Variationsbredden} = \text{Størsteværdi} - \text{Mindsteværdi}$$

I vores eksempel med klassens alder bliver variationsbredden da (19-15) 4!

Opgave 4: Find variationsbredden i klassens data!

- a) Find variationsbredden af klassens skostørrelser?

$$\text{Variationsbredden} = \quad = \underline{\quad}$$

- b) Find variationsbredden af klassens fraværs timer?

$$\text{Variationsbredden} = \quad = \underline{\quad}$$

- c) Find variationsbredden af sendte sms'er i klassen?

$$\text{Variationsbredden} = \quad = \underline{\quad}$$

- d) Find variationsbredden af klassens matematik prøve?

$$\text{Variationsbredden} = \quad = \underline{\quad}$$

- e) Find variationsbredden af klassens højder?

$$\text{Variationsbredden} = \quad = \underline{\quad}$$

Opgave 5: Beregn variationsbredde i årets dagtemperaturer i henholdsvis København & Moskva

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
Kbh	2,0	2,2	4,9	9,6	15,0	18,7	19,8	20,0	16,4	12,1	7,0	3,7
Moskva	-7,0	-5,0	1,0	9,0	18,0	20,0	21,0	20,0	12,0	8,0	0,0	-5,0

København Variationsbredde i temperatur: _____

Moskva Variationsbredde i temperatur: _____

NB: København og Moskva ligger på samme breddegrad men vi bemærker at de har væsentlig forskelligt klima! Moskva har fastlandsklima mens Kbh har kystlandsklima!

Facit: 8 10 10 14 18 21 28 33 37 40 45 48

Medianen:

Når man skal finde medianen skal man først stille alle observationerne på række efter størrelse fra mindst til størst! Den observation der står i midten kaldes for medianen!

15 15 15 15 15 16 16 16 16 16 16 16 **16** 16 16 17 17 17 17 17 17 17 17 18 18 19

Dvs. i eksemplet med klassens alder er medianen 16 som står på plads nr 13 i rækken!

Opgave 6: Find medianen i klassens data.

- a) Find medianen af klassens skostørrelser? (**NB:** start med at stille tallene på række!)

45 38 44 42 43 38 45 40 40 43 37 46 45 41 39 44 42 38 36 44 44 37 42 44 38

Medianen = _____

- b) Find medianen af klassens fraværs timer?

2 0 10 22 8 8 0 12 15 6 30 8 2 9 7 0 8 45 10 18 5 2 10 16 6

Medianen = _____

- c) Find medianen af sendte sms'er i klassen?

2 10 6 2 8 20 15 20 25 6 30 18 10 28 8 8 12 4 35 12 3 16 8 22 12

Medianen = _____

- d) Find medianen af klassens matematik prøve?

4 2 12 10 7 7 4 7 4 10 12 7 10 4 2 10 7 7 12 10 7 4 10 4 7

Medianen = _____

- e) Find medianen af klassens højder?

185 170 165 175 190 168 186 175 155 195 158 180 185 165 178 188 190 175 175 180 182 170 185 195 170

Medianen = _____

Facit: 5 7 8 11 12 18 42 45 165 178 185

Medianen i lige talsæt:

I forrige opgave har vi set på medianen i et observationssæt på 25 observationer. Dvs. at den observation der står på plads nr 13 står lige i midten. I ulige observationssæt vil det derfor altid være nemt at finde medianen. Men hvad hvis der kun er et lige antal f.eks. 24 observationer? Her står 2 observationer i midten nemlig nr 12 og 13. *I folkeskolen vælger man altid det tal der står til venstre for medianen* altså observation nr 12. Andre steder beregnes et gennemsnit imellem 12 og 13!

Lad os tag eksemplet med højderne i klassen og fjerne en af de højeste - så er der ligepludselig 24!

155 158 165 165 168 170 170 170 175 175 175 **175 178** 180 180 182 185 185 185 186 188 190 190 195

Her ser vi at medianen må være 175 for den står til venstre for midten. Hvis man vælger gennemsnittet fås medianen til 176,5!

Opgave 7: I en prøve er der givet følgende karakterer

12 7 10 7 10 10 12 7 7 12 10 02 10 7

Beregn følgende statistik variable på klassens karakterer

- Gennemsnit/Middelværdi = _____ = _____ (afrund til 2 decimal)
- Typetallet = _____
- Mindsteværdi = _____
- Størsteværdi = _____
- Variationsbredden = _____
- Medianen = _____

NB: Vi bemærker at medianen og gennemsnittet ikke behøver at være det samme. Talsættet kan være meget spredt eller samlet. F.eks. kan man have mange karakterer i den lave ende og i den høje ende men ende på et gennemsnit på 7 (selvom man ikke har fået den karakter overhoved)

Facit: 1 2 7 8,79 8,96 10 10 11 12 14

Hyppighed:

Hyppigheden er hvor mange gange hver observation forekommer i observationssættet. Den betegnes ofte med $h(x)$, hvilket vil sige at hyppigheden er en slags funktion som kendes fra ligninger f.eks. $f(x) = 2x + 3$. Lad os se på hvordan hyppigheden er i vores eksempel fra klassen:

Alder	Hyppighed $h(x)$
15	5
16	10
17	7
18	2
19	1

Opgave 8: Find hyppigheden for klassens data

a) Find hyppigheden af klassens skostørrelser?

45 38 44 42 43 38 45 40 40 43 37 46 45 41 39 44 42 38 36 44 44 37 42 44 38

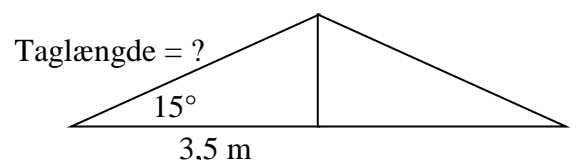
Skostørrelse	Hyppighed $h(x)$
36	
37	
38	
39	
40	
41	
42	
43	
44	
45	
46	

b) Find hyppigheden af klassens matematik prøve?

4 2 12 10 7 7 4 7 4 10 12 7 10 4 2 10 7 7 12 10 7 4 10 4 7

Karakter	Hyppighed $h(x)$
2	
4	
7	
10	
12	

Ekstra Opgave 1: Beregn taglængden på taget tegnet nedenfor?

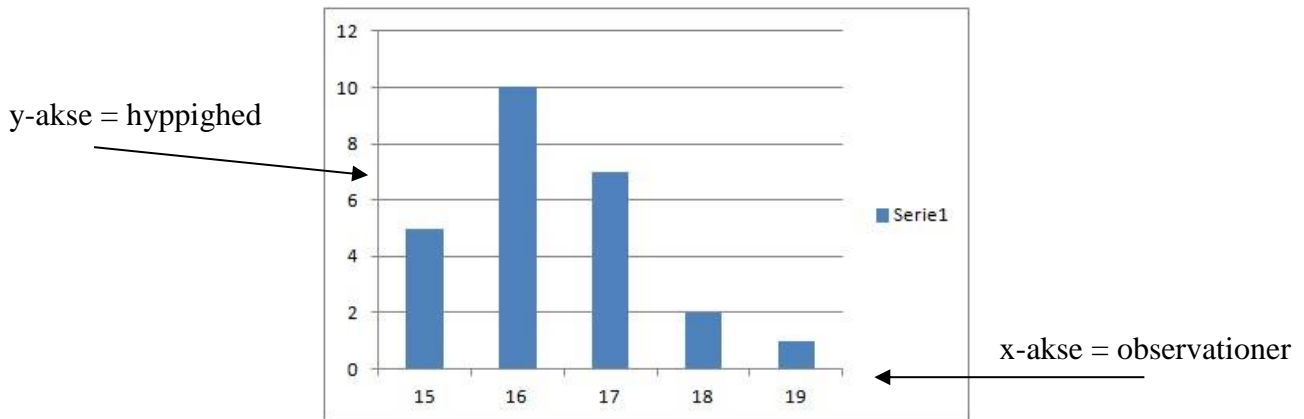


Facit: 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3,6 4 4,6 5 6 6 8

Pindediagram, stolpediagram og histogrammer:

I statistik er diagrammer en vigtig del af selve præsentationen af observationerne! Der findes mange forskellige former for diagrammer men nogle af de vigtigste er pinde-, stolpe og histogrammer som alle minder meget om hinanden.

Basaltset er det blot et koordinatsystem med en x og en y akse hvor observationerne er lagt ind i x akserne og hyppigheden ud af y akserne. Lad os se hvordan vores eksempel kommer til at se ud:



Opgave 9: Lav et histogram af hyppighederne fra forrige opgave

- a) Lav et histogram over klassens skostørrelser? (brug hyppighedstabel fra forrige opgave)



- b) Lav et histogram over klassens matematik prøve?



Summeret Hyppighed:

Den summerede hyppighed er hyppighederne lagt sammen med de foregående hyppigheder (vi husker jo at summen er resultatet af et addition/plus stykke). Den summerede hyppighed betegnes $H(x)$. Bemærk det store bogstav!! Lad os se på eksemplet da det forklarer det meget bedre

Alder	Hyppighed $h(x)$	Summeret Hyppighed $H(x)$
15	5	5
16	10	15
17	7	22
18	2	24
19	1	25

Opgave 10: Find den summerede hyppighed

- a) I en klasse bliver der foretaget en undersøgelse hvor hver elev skal tælle hvor mange blyanter, farveblyanter og tudser vedkommende har i sit penalhus. Det er der kommet følgende observationer ud af.

10 6 7 2 3 6 10 3 10 1 7 8 9 7 8 2 0 8 1 9 5 3 7 2 3 6 1 8 10 3

Find først hyppigheden af observationerne og derefter den summerede hyppighed?

	Hyppighed $h(x)$	Summeret Hyppighed $H(x)$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

- b) På et hold på lægestudiet er der studerende følgende alder:

22 22 21 20 21 20 18 19 19 20 19 21 19 22 21 19 21 23 20 19 18 19 21 20 18 19 20 21 23 22

Find først hyppigheden og derefter den summerede hyppighed?

	Hyppighed $h(x)$	Summeret Hyppighed $H(x)$
18		
19		
20		
21		
22		
23		

Facit: 1 3 4 7 11 12 12 13 16 17 20 24 24 26 28 30 30

Frekvens:

Frekvensen for en observation angiver hvor stor en del af alle observationerne en bestemt observation udgør. Frekvensen kan beregnes ved at tage hyppigheden for observationen og dividere med det samlede antal af observationer

$$Frekvens = \frac{hyppighed_for_observation}{samlede_antal_observationer}$$

Frekvensen betegnes f(x) og kan enten opgives som en brøk, decimaltal eller en procentdel.

Lad os se på frekvensen i vores eksempel med klassens alder:

Alder	Hyppighed h(x)	Frekvens f(x)	f(x) i %
15	5	5/25 = 0,2	20
16	10	10/25 = 0,4	40
17	7	7/25 = 0,28	28
18	2	2/25 = 0,08	8
19	1	1/25 = 0,04	4

Opgave 11: Find frekvensen af hyppighederne fra opgave 8

a) Beregn frekvensen skostørrelserne fra opgave 8!

Skostørrelse	Hyppighed h(x)	Frekvens f(x)
36		
37		
38		
39		
40		
41		
42		
43		
44		
45		
46		

b) Beregn frekvensen af karaktererne fra opgave 8!

Karakter	Hyppighed h(x)	Frekvens f(x)
2		
4		
7		
10		
12		

Ekstra Opgave 2: Løs ligningen

$$\frac{x+7}{3} = 2x+1$$

Facit: 0,04 0,04 0,04 0,04 0,08 0,08 0,08 0,08 0,12 0,12 0,12 0,16 0,20 0,24 0,24 0,32 0,80

Den summerede frekvens:

Den summerede frekvens er frekvensen lagt sammen med de foregående frekvenser. Den summerede frekvens betegnes $F(x)$. Bemærk det store bogstav!!

Lad os se på eksemplet da det forklarer det meget bedre

Alder	Hyppighed $h(x)$	Frekvens $f(x)$	Summeret Frekvens $F(x)$
15	5	0,2	0,2
16	10	0,4	0,6
17	7	0,28	0,88
18	2	0,08	0,96
19	1	0,04	1

Fordelen med den summerede frekvens er at man hurtigt kan se f.eks. hvor mange der er under 17 år i klassen nemlig 60 %!

Opgave 12: Beregn den summerede frekvens på frekvenserne fra forrige opgave!

- a) Beregn den summerede frekvensen af skostørrelserne!

Skostørrelse	Hyppighed $h(x)$	Frekvens $f(x)$	Summeret Frekvens $F(x)$
36			
37			
38			
39			
40			
41			
42			
43			
44			
45			
46			

Hvor mange har mindre end størrelse 41 i sko? _____ %

- b) Beregn den summerede frekvens af karaktererne!

Karakter	Hyppighed $h(x)$	Frekvens $f(x)$	Summeret Frekvens $F(x)$
2			
4			
7			
10			
12			

Hvor mange har fået mindre end 10 i karakter? _____ %

Facit: 0,04 0,08 0,12 0,28 0,32 0,32 0,40 0,44 0,56 0,64 0,64 0,84 0,88 0,96 1,0 1,0
40 % 64 % 90 %

Grupperede Observationer:

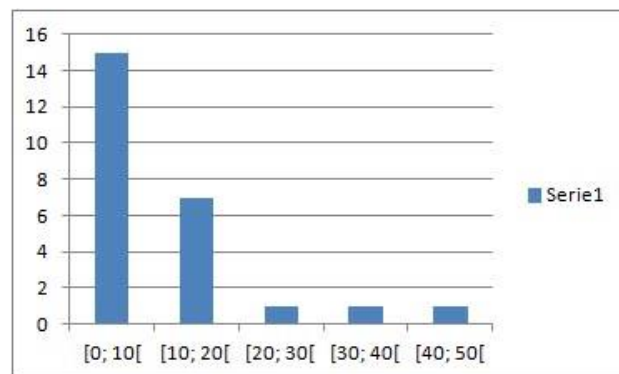
Statistik bygger jo på observationer altså tal og i de foregående opgaver har de været nemme at tælle og stille op! I eksemplet med skostørrelserne er der ingen der har en sko med størrelsen 44,46! Observationerne er alle sammen hele tal som er nemme at sortere. Anderledes ser det ud for antallet af fraværsdage for klassen - se tabellen nedenunder:



Adam	2	Emilie	8	Juliane	30	Mikkel	0	Nikolaj	5
Amanda	0	Frederik	0	Lars	8	Mischa	8	Patricia	2
Artemis	10	Hans	12	Mads	2	Monika	45	Peter	10
Christian	22	Helen	15	Marie	9	Natascha	10	Tobias	16
Dan	8	Jonathan	6	Mathias	7	Niki	18	Tora	6

Hvis man skulle lave en hyppighedstabel over disse observationerne vil der blot være en observation ud for de fleste fraværsdage, hvilket man ikke kan bruge til noget. Vi er med andre ord nødt til at gruppere observationerne i intervaller så flere observationer tælles sammen. I eksemplet ovenfor vil det være praktisk at gruppere observationerne i intervaller på 10 som følger:

Fraværsdage	Antal
[0; 10[15
[10; 20[7
[20; 30[1
[30; 40[1
[40; 50[1



Angivelse af intervaller:

Ovenfor i tabellen benyttes nogle underlige kantede parenteser til at angive forskellige intervaller i fraværsdage! I matematik er et interval alle tal imellem to tal f.eks. fra 0 til 10. Intervallet markeres med [eller med] også kaldt en klamme. Klammen kan enten vende væk fra tallet, hvilket betyder at tallet ikke er med i intervallet - eller klammen vender ind mod tallet hvilket betyder at tallet er med. Det giver mere mening ved at se på de 4 forskellige intervaller der kan være imellem 0 og 10:

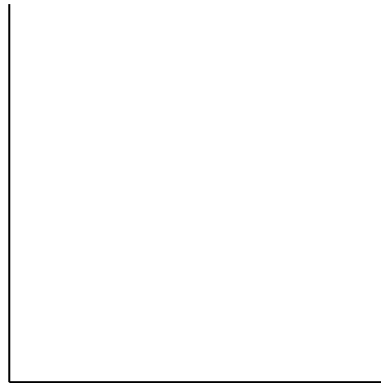
- $[0; 10]$ = lukket interval med alle tal fra 0 til 10 hvor 0 og 10 er med!
- $]0; 10]$ = halv åbent interval med alle tal fra 0 til 10 hvor 0 ikke er med mens 10 er med!
- $]0; 10[$ = åbent interval med alle tal fra 0 til 10 hvor 0 og 10 ikke er med!
- $[0; 10[$ = halv åbent interval med alle tal fra 0 til 10 hvor 0 er med men ikke 10

Opgave 13: Grupper observationerne i intervallerne og find hyppigheden

- a) Nedenfor ses antallet af sendte sms'er klassen sender. Grupper observationerne i intervaller på 10 og tegn et histogram/stolpediagram

2 10 6 2 8 20 15 20 25 6 30 18 10 28 8 8 12 4 35 12 3 16 8 22 12

Sms'er	Antal
[0; 10[
[10; 20[
[20; 30[
[30; 40[



- b) Nedenfor ses elevernes højder i klassen. Grupper observationerne i intervaller på 10 og tegn et graf.

185 170 165 175 190 168 186 175 155 195 158 180 185 165 178 188 190 175 175 180 182
170 185 195 170

Højder cm	Antal
[150; 160[
[160; 170[
[170; 180[
[180; 190[
[190; 200[



- c) Grupper de tilfældige tal nedenfor i passende lige store intervaller (**NB:** findes ikke i facit):

45 12 29 28 8 18 22 46 31 35 49 22 36 1 47 15 46 47 41 24 5

Interval	Hyppighed	Interval	Hyppighed

Facit: 0 2 2 3 4 5 7 8 8 8 10 13

Ekstra Opgave 3: Løs færdighedsopgaverne

En klasse får karaktererne:

8 9 03 7 5 5 9 10 8 8 8 6 11 10 9 9 7 7 7 8

- 1) Typetallet = _____
- 2) Størsteværdien = _____
- 3) Medianen = _____

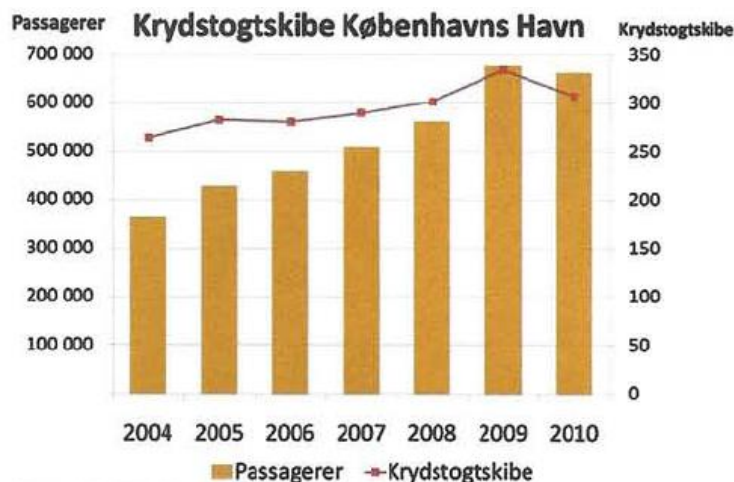
Alderen på 10 personer:

20 19 20 21 22 19 20 26 23 20

- 4) Gennemsnittet = _____
- 5) Typetallet = _____
- 6) Medianen = _____
- 7) Variationsbredden = _____

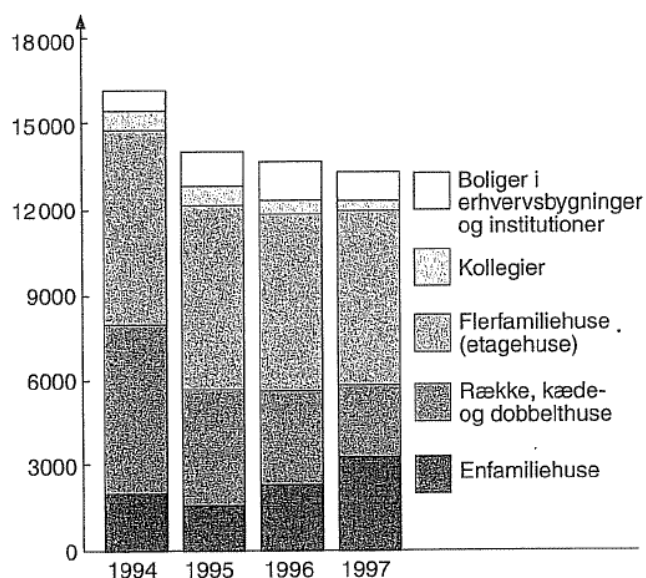
x	h(x)	f(x)
-3	0	0
00	0	0
02	1	5
4	2	10
7	8	38
10	6	29
12	4	19

- 8) Størsteværdien = _____
- 9) Typetallet = _____
- 10) Medianen = _____



11) Den største årlige stigning i antallet af krydstogtskibe er fra år _____ til år _____

12) Stigningen af antallet af passagere fra 2008 til 2009 er _____



13) Hvor mange boliger blev der fuldført i 1995? _____

14) Fra 1995 til 1997 falder antallet af fuldførte boliger _____

Facit: 3 7 7 7 8 8 11 12 20 20 21 600 750 1.400 2000 2008 2009 95.000 120.000 125.000